

БАЛТИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. ИММАНУИЛА КАНТА

Е. А. Васильева

# УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Часть 2

Учебно-методическое пособие

Издательство

Балтийского федерального университета им. Иммануила Канта  
2026

УДК 517.95  
ББК 22.161.6  
В191

*Рецензенты*

*В. А. Гриценко*, ведущий научный сотрудник, доктор физико-математических наук,  
Атлантическое Отделение института океанологии им. П. П. Ширшова РАН;  
*А. В. Вялова*, кандидат физико-математических наук, доцент,  
Калининградский государственный технический университет

**Васильева, Е. А.**

В191 Уравнения математической физики. Часть 2 : учебно-методическое пособие / Е. А. Васильева. — Калининград : Издательство БФУ им. И. Канта, 2026. — 62 с.  
ISBN 978-5-9971-1040-6

Пособие представляет собой вторую часть сборника задач по курсу «Уравнения математической физики» и призвано облегчить студентам изучение данной дисциплины. Содержит систематическое изложение аналитических методов решения эллиптических уравнений математической физики. В первой главе детально рассматривается применение метода разделения переменных для нахождения стационарных распределений потенциалов в областях различной формы и размерности. Во второй главе представлены теория функций Грина и основы метода потенциалов. Изложение теоретического материала сопровождается многочисленными практическими примерами. Для всех задач приведены ответы.

Рекомендовано к изданию образовательным кластером «Институт высоких технологий». Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям «Прикладная математика и информатика», «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем».

УДК 517.95  
ББК 22.161.6

ISBN 978-5-9971-1040-6

© Васильева Е. А., 2026  
© Оформление, БФУ им. И. Канта, 2026

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	4
<b>Глава 1. Метод Фурье для уравнений Лапласа и Пуассона</b> .....	5
1.1. Гармонические функции.....	5
1.2. Краевые задачи для круга и кольца .....	7
1.3. Краевые задачи для прямоугольника.....	14
1.4. Краевые задачи для шара и шарового слоя.....	24
1.4.1. Частный случай $u = u(r, \theta)$ .....	24
1.4.2. Общий случай.....	28
<b>Глава 2. Функция Грина оператора Лапласа</b> .....	33
2.1. Метод отражений .....	33
2.2. Метод конформных отображений .....	37
2.3. Метод потенциалов .....	41
<b>Ответы и указания</b> .....	49
<b>Список рекомендуемой литературы</b> .....	61

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

Настоящее пособие представляет собой вторую часть сборника задач по курсу «Уравнения математической физики» и предназначено для студентов и магистров образовательно-научного кластера «Институт высоких технологий» БФУ им. И. Канта.

Изложение материала в пособии разделено на два логических блока, соответствующих фундаментальным подходам к решению эллиптических задач математической физики.

Первая глава представляет собой введение в теорию гармонических функций и их физическую интерпретацию. Основное внимание уделяется приложениям данного аппарата для описания стационарных состояний различной природы: от электростатики и магнитостатики до теплопроводности. Ключевое место в главе занимает детальный разбор метода Фурье (разделения переменных) как основного инструмента решения краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона. На конкретных примерах демонстрируется техника построения решений для областей классической формы, при этом особо оговаривается специфика постановки как внутренних, так и внешних задач.

Вторая глава расширяет инструментарий читателя, знакомя его с другими аналитическими методами. В ее первом разделе рассматривается метод функций Грина, являющийся мощным средством решения неоднородных задач. Подробно разбираются два способа построения функции влияния точечного источника: метод отражений для границ простой формы и метод конформных отображений для двумерных областей.

Во втором разделе излагаются основы теории потенциалов. В рамках этой теории рассматриваются объемные распределения и поверхностные слои (простой и двойной потенциалы). Показано, как с их помощью краевые задачи для уравнений в частных производных сводятся к интегральным уравнениям.

В начале каждого раздела пособия приведены краткие теоретические сведения и разобраны решения типовых задач. Около трети задач, включенных в сборник, были взяты из источников, указанных в списке литературы, остальные являются авторскими.

В конце пособия приведены ответы ко всем задачам, а для задач, решение которых требует нестандартных приемов, даются указания.

Представленное пособие учитывает многолетний опыт преподавания курса «Уравнения математической физики» и соответствует действующим образовательным стандартам по всем специальностям образовательно-научного кластера «Институт высоких технологий» БФУ им. И. Канта.

# Глава 1

## Метод Фурье для уравнения Пуассона

### 1.1. Гармонические функции

**Определение 1.1.** Функция  $u$  называется гармонической в области  $\Omega$ , если в этой области она удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta u = 0$ .

1. Гармоническая в области  $\Omega$  функция  $u$  является бесконечно дифференцируемой в этой области.

2. Для гармонической в области  $\Omega$  функции  $u$  справедливо равенство

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = 0, \quad (1.1)$$

где  $\partial\Omega$  – граница области  $\Omega$ ,  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к  $\partial\Omega$  в точке  $y$ .

3. Среднее арифметическое гармонической в области  $\Omega$  функции  $u$  по любой сфере  $S_{x_0}^R$  (сфера с центром в точке  $x_0$  и радиусом  $R$ ), содержащейся в области  $\Omega$ , равно значению функции в центре сферы:

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_1|R^{n-1}} \int_{S_{x_0}^R} u(x) dS,$$

где  $|S_1|$  – площадь поверхности единичной сферы в пространстве  $R^n$ .

4. Среднее арифметическое гармонической в области  $\Omega$  функции  $u$  по любому шару  $T_{x_0}^R$  (шар с центром в точке  $x_0$  и радиусом  $R$ ), содержащемуся в области  $\Omega$ , равно значению функции в центре шара:

$$u(x_0) = \frac{n}{|S_1|R^n} \int_{T_{x_0}^R} u(x) dx.$$

**5. Принцип максимума для гармонической функции.** Гармоническая в области  $\Omega$  и непрерывная в замкнутой области  $\bar{\Omega}$  функция  $u$  принимает максимальное и минимальное значения на границе области  $\Omega$ . Более того, если  $u(x) \neq const$ , то справедливы строгие неравенства

$$u(x) < \max_{x \in \partial\Omega} u(x), \quad u(x) > \min_{x \in \partial\Omega} u(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

**Определение 1.2.** Фундаментальным решением уравнения Лапласа называется функция

$$U(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{|S_1|(n-2)} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}, & n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}, & n = 2, \end{cases} \quad (1.2)$$

**6. (Интегральное представление для гармонической функции)**  
 Для гармонической дважды непрерывно дифференцируемой в замкнутой области  $\bar{\Omega}$  функции  $u$  справедливо следующее интегральное представление:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left( U \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \right) dS,$$

где  $U(x, y)$  – фундаментальное решение уравнения Лапласа.

**Определение 1.3.** Точка  $y$  называется устранимой особенностью функции  $u(x)$ , гармонической в области  $\Omega/\{y\}$ , если при  $x \rightarrow y$  функция  $u(x)$  растет медленнее, чем фундаментальное решение уравнения Лапласа  $U(x, y)$ , то есть

$$\lim_{x \rightarrow y} \frac{u(x)}{U(x, y)} = 0.$$

**7. Теорема об устранимой особенности.** Пусть функция  $u(x)$  гармоническая в области  $\Omega/\{y\}$  и точка  $y$  – устранимая особенность функции  $u(x)$ , тогда существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow y} u(x) = A < \infty.$$

Далее, если доопределить функцию  $u(x)$  в точке  $x = y$  по непрерывности

$$u(y) = A,$$

то функция  $u$  будет гармонической во всей области  $\Omega$ .

**Определение 1.4.** Функция  $u(x)$  полуограничена сверху (снизу) в области  $\Omega$ , если  $\forall x \in \Omega$  выполняется неравенство  $u(x) < M$  ( $u(x) > M$ ).

Если функция полуограничена снизу и сверху, тогда она ограничена.

**8. Теорема Лиувилля.** Пусть функция  $u(x)$  гармоническая в  $R^n$  и полуограничена снизу (сверху). Тогда  $u(x) = const$ .

**Определение 1.5.** Функция  $f(x)$ ,  $x \in R^n$  называется аналитической в точке  $x_0$ , если в некоторой окрестности этой точки она разлагается в сходящийся степенной ряд.

9. Если функция гармоническая в области  $\Omega$ , то она является в этой области аналитической функцией.

## Необходимое условие разрешимости внутренней задачи Неймана

Рассмотрим внутреннюю задачу Неймана:

$$\Delta u = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = \varphi.$$

Так как для этой задачи

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = \int_{\partial\Omega} \varphi dS,$$

то, согласно (1.1), для ее разрешимости необходимо, чтобы

$$\int_{\partial\Omega} \varphi dS = 0.$$

## 1.2. Краевые задачи для круга и кольца

### Краевые задачи для кольца

Рассмотрим следующую краевую задачу Дирихле для кольца: найти функцию  $u = u(r, \varphi)$ , удовлетворяющую внутри кольца уравнению Лапласа  $\Delta u = 0$  и принимающую заданные значения на границе кольца, то есть

$$u|_{r=R_1} = f_1(\varphi), \quad u|_{r=R_2} = f_2(\varphi). \quad (1.3)$$

Запишем уравнение Лапласа  $\Delta u = 0$  в полярных координатах:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (1.4)$$

Будем искать частные решения уравнения (1.4) в виде произведения функций различных переменных:

$$u = X(r)\Phi(\varphi). \quad (1.5)$$

Подставляя (1.5) в (1.4) и разделяя переменные, получим

$$\frac{r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dX(r)}{dr} \right)}{X(r)} = - \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}.$$

Так как в левой и правой частях равенства стоят функции различных переменных, то данное равенство при произвольных значениях аргументов этих функций может выполняться только в том случае, когда обе эти части равны некоторой постоянной  $\lambda$ . Следовательно, функции  $X(r)$  и  $\Phi(\varphi)$  должны быть соответственно решениями уравнений

$$r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dX(r)}{dr} \right) - \lambda X(r) = 0, \quad (1.6)$$

$$\Phi''(\varphi) + \lambda \Phi(\varphi) = 0. \quad (1.7)$$

Так как искомое решение должно быть функцией точки плоскости, то мы потребуем, чтобы

$$u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi),$$

и, следовательно, функция  $\Phi(\varphi)$  должна удовлетворять периодическим граничным условиям:

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi), \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi). \quad (1.8)$$

Таким образом, мы приходим к простейшей задаче на собственные значения, также называемой задачей Штурма – Лиувилля: найти значения параметра  $\lambda$ , при которых существуют нетривиальные решения задачи (1.7)–(1.8), а также найти эти решения. Значения  $\lambda$  называются собственными значениями, а соответствующие им решения – собственными функциями.

Для решения задачи (1.7)–(1.8) рассмотрим три случая.

1.  $\lambda < 0$ . Общее решение уравнения (1.7) в этом случае имеет вид

$$\Phi(\varphi) = a \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda} \varphi + b \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda} \varphi$$

и, очевидно, не является периодическим ни при каких значениях  $\lambda$ . Следовательно, при  $\lambda < 0$  задача Штурма – Лиувилля (1.7)–(1.8) не имеет собственных значений.

2.  $\lambda = 0$ . Тогда общее решение уравнения (1.7) имеет вид

$$\Phi(\varphi) = a + b\varphi.$$

Оно будет периодическим только в том случае, когда  $b = 0$ . Следовательно,  $\lambda = 0$  является собственным значением, а  $\Phi_0(\varphi) = 1$  – отвечающей этому собственному значению собственной функцией.

3.  $\lambda > 0$ . Так как

$$\Phi(\varphi) = a \cos \sqrt{\lambda}\varphi + b \sin \sqrt{\lambda}\varphi,$$

то периодические решения возможны только в случае, если  $\sqrt{\lambda} = k$ , где  $k$  – целое. Следовательно, числа  $\lambda_k = k^2$  являются собственными значениями, а функции

$$\Phi_k(\varphi) = a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi \quad (1.9)$$

отвечающими этим собственным значениям собственными функциями.

После подстановки  $\lambda_k = k^2$  в уравнение (1.6) оно примет вид

$$r^2 X'' + r X' - k^2 X = 0.$$

Уравнение (1.6) представляет собой уравнение Эйлера, решение которого при  $k = 0$  имеет вид

$$X_0(r) = C_0 + D_0 \ln r.$$

При  $k > 0$  решение ищется в виде  $X_k(r) = r^\alpha$ . Подставляя его в уравнение, получим

$$\begin{aligned} r^2 \alpha(\alpha - 1)r^{\alpha-2} + r \alpha r^{\alpha-1} - k^2 r^\alpha &= 0, \\ \alpha(\alpha - 1) + \alpha - k^2 &= 0, \quad \alpha = \pm k. \end{aligned}$$

Итак, мы нашли счетный набор функций

$$X_0(r) = C_0 + D_0 \ln r, \quad X_k(r) = c_k r^k + d_k r^{-k} \quad (k > 0),$$

отвечающих значениям  $\lambda_k = k^2$ ,  $k = 0, 1, \dots$  и можем записать совокупность частных решений  $u_k = X_k(r)\Phi_k(\varphi)$  уравнения (1.4):

$$\begin{aligned} u_0(r, \varphi) &= C_0 + D_0 \ln r, \\ u_k(r, \varphi) &= (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)(c_k r^k + d_k r^{-k}) \equiv \\ &\equiv \sum_{k=1}^{\infty} (C_k^{(1)} r^k + D_k^{(1)} r^{-k}) \cos k\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k^{(2)} r^k + D_k^{(2)} r^{-k}) \sin k\varphi. \end{aligned}$$

Решение краевой задачи для кольца ищется в виде ряда Фурье по функциям  $u_k(r, \varphi)$ :

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k(r, \varphi) = C_0 + D_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k^{(1)} r^k + D_k^{(1)} r^{-k}) \cos k\varphi + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (C_k^{(2)} r^k + D_k^{(2)} r^{-k}) \sin k\varphi, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где коэффициенты  $C_0, D_0, C_k^{(1)}, D_k^{(1)}, C_k^{(2)}, D_k^{(2)}$  определяются из граничных условий (1.3).

## Внутренние задачи для круга

Для того чтобы функция  $u$  была непрерывна в круге, мы должны потребовать, чтобы в (1.10) коэффициенты  $D_k = 0$ , так как соответствующие им слагаемые неограниченно растут при  $r \rightarrow 0$ . Поэтому решение внутренней задачи Дирихле  $u(r, \varphi)$  для круга радиуса  $R$  ищется в виде ряда Фурье

$$u(r, \varphi) = C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{R^k} (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi), \quad (1.11)$$

где  $A_k \equiv C_k^{(1)} R^k$ ,  $B_k \equiv C_k^{(2)} R^k$ .

Коэффициенты  $C$ ,  $A_k$  и  $B_k$  определяются из граничного условия  $u|_{r=R} = f(\varphi)$  по формулам коэффициентов тригонометрического ряда Фурье

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) d\psi, \quad A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos k\psi d\psi, \quad B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin k\psi d\psi. \quad (1.12)$$

Если просуммировать ряд (1.11), то решение при условии непрерывности функции  $f(\varphi)$  будет давать следующая формула, называемая формулой Пуассона для внутренней задачи Дирихле для круга:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \psi) + R^2} f(\psi) d\psi. \quad (1.13)$$

Если обозначить через  $x = x(r, \varphi)$  и  $y = y(R, \psi)$ , то, учитывая, что  $dl = R d\psi$ , формулу (1.13) можно записать в виде

$$u(x) = \frac{1}{2\pi R} \int_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^2} f(y) dy. \quad (1.14)$$

## Внешние задачи для круга

Рассмотрим теперь внешнюю задачу для круга. Для того чтобы функция  $u$  была непрерывна вне круга, мы должны потребовать, чтобы в (1.10) коэффициенты  $C_k = 0$ , так как соответствующие им слагаемые неограниченно растут при  $r \rightarrow \infty$ . Тогда решение внешней задачи Дирихле для круга ищется в виде следующего ряда Фурье:

$$u(r, \varphi) = C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R^k}{r^k} (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi),$$

$A_k \equiv D_k^{(1)}/R^k$ ,  $B_k \equiv D_k^{(2)}/R^k$ , а коэффициенты  $C$ ,  $A_k$  и  $B_k$  определяются из граничного условия по формулам (1.12).

Также при условии непрерывности функции  $f(\varphi)$  решение внешней задачи для круга с центром в начале координат будет давать интегральная формула Пуассона

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{r^2 - R^2}{r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \psi) + R^2} d\psi, \quad (1.15)$$

которая очень похожа на формулу (1.13), только в данном случае в ядре Пуассона величины  $r$  и  $R$  поменялись местами.

**Пример 1.1.** Найти функцию, гармоническую внутри единичного круга и такую, что

$$u|_{r=1} = \cos^2 \varphi.$$

**Способ 1.** Так как это внутренняя задача Дирихле для круга, то одним из способов ее решения является использование формулы Пуассона (1.13):

$$u(r, \varphi) = \frac{1 - r^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 \psi d\psi}{1 - 2r \cos(\varphi - \psi) + r^2}. \quad (1.16)$$

Так как подынтегральная функция является периодической с периодом  $2\pi$ , то в интеграле можно сделать замену переменной  $\alpha = \psi - \varphi$ , не меняя пределов интегрирования, и получить

$$u(r, \varphi) = \frac{1 - r^2}{4\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{1 - 2r \cos \alpha + r^2} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2(\varphi + \alpha) d\alpha}{1 - 2r \cos \alpha + r^2} \right). \quad (1.17)$$

Вычислим интеграл

$$I_k = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos k(\varphi + \alpha) d\alpha}{1 - 2r \cos \alpha + r^2} = \operatorname{Re} \left( e^{ik\varphi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ik\alpha} d\alpha}{1 - 2r \cos \alpha + r^2} \right).$$

После замены переменной  $z = e^{i\alpha}$  получим

$$\begin{aligned} I_k &= \operatorname{Re} \left( e^{ik\varphi} \int_{|z|=1} \frac{z^{k-1} dz}{i(1 - r(z + z^{-1}) + r^2)} \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left( 2\pi e^{ik\varphi} \operatorname{Res} \frac{z^{k-1}}{1 - r(z + z^{-1}) + r^2} \Big|_{z=r} \right) = \frac{2\pi r^k}{1 - r^2} \cos k\varphi. \end{aligned}$$

Подставляя значения  $I_0$  и  $I_2$  в (1.17), получим

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2}(1 + r^2 \cos 2\varphi).$$

**Способ 2.** Теперь найдем решение этой же задачи методом разделения переменных. Решение внутренней задачи Дирихле ищется в виде ряда Фурье (1.11). Определим коэффициенты  $C$ ,  $A_k$ ,  $B_k$  из краевого условия

$$u(1, \varphi) = \cos^2 \varphi = C + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi). \quad (1.18)$$

Так как функция  $\cos^2 \varphi$  разлагается в конечный ряд Фурье

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi,$$

а коэффициенты ряда Фурье, как известно, определяются однозначно, то достаточно в равенстве (1.18) приравнять коэффициенты при одинаковых собственных функциях. Откуда  $C = 1/2$ ,  $A_2 = 1/2$ ,  $A_k = 0$ ,  $\forall k \neq 2$ ,  $B_k = 0$ ,  $\forall k$ , и получается такое же решение.

**Пример 1.2.** Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса  $R$  и такую, что

$$u_r|_{r=R} = \cos 2\varphi.$$

*Решение.* Для решения внутренней задачи Неймана воспользуемся равенством (1.11). Проинтегрировав его по  $r$ , получим

$$u_r|_{r=R} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R} (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) = \cos 2\varphi.$$

Так как коэффициенты разложения в ряд Фурье определяются единственным образом, получаем решение

$$u(r, \varphi) = C + \frac{r^2}{2R} \cos 2\varphi,$$

где  $C$  – произвольная постоянная.

**Пример 1.3.** Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса  $R$  и такую, что

$$u_r|_{r=R} = \sin \frac{\varphi}{2}.$$

*Решение.* Проверим необходимое условие разрешимости внутренней задачи Неймана:

$$\int_{r=R} \sin \frac{\varphi}{2} dS = \int_0^{2\pi} \sin \frac{\varphi}{2} \cdot R d\varphi = 4R \neq 0,$$

следовательно, делаем вывод, что задача неразрешима.

**Задание 1.1.** Найти функцию, гармоническую внутри единичного круга  $r < 1$ , такую, что

- |   |   |
|---|---|
| 1. $u _{r=1} = \cos^2 \varphi$ ;                  | 8. $u_r _{r=1} = \cos^4 \varphi$ ;                        |
| 2. $u _{r=1} = \sin^2 \varphi$ ;                  | 9. $u_r _{r=1} = \cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi$ ;       |
| 3. $u _{r=1} = \sin^3 \varphi$ ;                  | 10. $u_r _{r=1} = \sin 3\varphi$ ;                        |
| 4. $u _{r=1} = \cos^3 \varphi$ ;                  | 11. $u_r _{r=R} = \cos^3 \varphi$ ;                       |
| 5. $u _{r=1} = 1 + \cos 4\varphi$ ;               | 12. $u_r _{r=1} = \cos 2\varphi + 2 \sin 3\varphi$ ;      |
| 6. $u _{r=1} = \cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi$ ; | 13. $u_r _{r=1} = \sin^2 \varphi + \cos^2 2\varphi - 1$ ; |
| 7. $u_r _{r=1} = \sin^4 \varphi$ ;                | 14. $u _{r=1} = 2 + \sin 3\varphi$ .                      |

**Задание 1.2.** Решить внешнюю краевую задачу для уравнения Лапласа для круга  $r > R$ , такую, что

- |   |   |
|---|---|
| 1. $u _{r=R} = \cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi$ ; | 8. $u_r _{r=R} = \cos 2\varphi$ ;                     |
| 2. $u _{r=R} = \cos^4 \varphi$ ;                  | 9. $u_r _{r=R} = \cos 3\varphi$ ;                     |
| 3. $u _{r=R} = \cos^3 \varphi$ ;                  | 10. $u_r _{r=R} = \sin 3\varphi$ ;                    |
| 4. $u _{r=R} = \cos^2 \varphi$ ;                  | 11. $u_r _{r=R} = \cos^3 \varphi$ ;                   |
| 5. $u _{r=R} = \sin \varphi$ ;                    | 12. $u_r _{r=R} = \sin^2 \varphi - \cos^2 2\varphi$ ; |
| 6. $u_r _{r=R} = \sin^4 \varphi$ ;                | 13. $u_r _{r=R} = \sin^2 3\varphi - \frac{1}{2}$ ;    |
| 7. $u_r _{r=R} = \sin^3 \varphi$ ;                | 14. $u _{r=R} = \cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi$ .    |

**Задание 1.3.** Найти гармоническую в кольце  $1 < r < 2$  функцию такую, что

$$u|_{r=1} = f_1(\varphi); \quad u_r|_{r=2} = f_2(\varphi),$$

где

- |  |  |
|--|--|
| 1. $f_1(\varphi) = \sin \varphi$ ; $f_2(\varphi) = 1$ ;              | 5. $f_1(\varphi) = \cos 2\varphi$ ; $f_2(\varphi) = \sin^2 2\varphi$ ;       |
| 2. $f_1(\varphi) = 1$ ; $f_2(\varphi) = \cos \varphi$ ;              | 6. $f_1(\varphi) = \sin^3 \varphi$ ; $f_2(\varphi) = \sin \varphi$ ;         |
| 3. $f_1(\varphi) = \sin^2 \varphi$ ; $f_2(\varphi) = \cos \varphi$ ; | 7. $f_1(\varphi) = \sin^2 \varphi$ ; $f_2(\varphi) = \cos \varphi$ ;         |
| 4. $f_1(\varphi) = \cos^2 \varphi$ ; $f_2(\varphi) = \sin \varphi$ ; | 8. $f_1(\varphi) = 1 + \cos 2\varphi$ ; $f_2(\varphi) = 1 + \sin 2\varphi$ . |

**Задание 1.4.** Найти стационарное распределение температуры  $u(r, \varphi, z)$  внутри бесконечного цилиндра радиуса  $R$ , если на одной половине поверхности цилиндра ( $0 \leq \varphi < \pi$ ) поддерживается температура  $-T_0$ , а на другой половине ( $-\pi \leq \varphi < 0$ ) – температура  $T_0$ .

**Задание 1.5.** Найти функцию, гармоническую в круговом секторе  $0 < \varphi < \alpha$ ,  $0 < r < R$  и такую, что

- |   |  |
|---|--|
| 1. $u _{\varphi=0} = u _{\varphi=\alpha} = 0$ ; $u _{r=R} = A$ ;                        | 2. $u _{\varphi=0} = u _{\varphi=\alpha} = 0$ ; $u _{r=R} = A\varphi$ ;          |
| 3. $u_\varphi _{\varphi=0} = u_\varphi _{\varphi=\alpha} = 0$ ; $u _{r=R} = A\varphi$ ; | 4. $u_\varphi _{\varphi=0} = u _{\varphi=\alpha} = 0$ ; $u _{r=R} = A$ ;         |
| 5. $u _{\varphi=0} = u_\varphi _{\varphi=\alpha} = 0$ ; $u _{r=R} = A\varphi$ ;         | 6. $u _{\varphi=0} = u_\varphi _{\varphi=\alpha} = 0$ ; $u _{r=R} = A$ ;         |
| 7. $u_\varphi _{\varphi=0} = u _{\varphi=\alpha} = 0$ ; $u _{r=R} = A\varphi$ ;         | 8. $u_\varphi _{\varphi=0} = u_\varphi _{\varphi=\alpha} = 0$ ; $u _{r=R} = A$ . |

### 1.3. Краевые задачи для прямоугольника

Рассмотрим задачу Дирихле для прямоугольника:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & (x, y) \in (0, a) \times (0, b); \\ u|_{x=0} &= 0, & u|_{x=a} = 0, \\ u|_{y=0} &= g_1(x), & u|_{y=b} = g_2(x). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Будем решать задачу методом Фурье, то есть искать частные решения задачи (1.19) в виде произведения функций  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ . Подставляя  $u(x, y)$  в уравнение (1.19) и разделяя переменные, мы получим

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Это двойное равенство справедливо в силу того, что значения функций различных аргументов  $x$  и  $y$  совпадают при любых значениях этих аргументов, что возможно лишь в случае, если эти функции являются постоянными.

Из граничных условий по  $x$  следует, что  $X(0) = 0$ ,  $X(a) = 0$ . Таким образом, мы приходим к уравнению

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \quad (1.20)$$

и задаче Штурма – Лиувилля

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(a) = 0. \end{cases} \quad (1.21)$$

Найдем собственные функции и собственные значения задачи (1.21).

1.  $\lambda < 0$ . В этом случае общее решение уравнения имеет вид  $X(x) = C_1 \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda}x + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda}x$ . Так как  $X(0) = 0$ , то  $C_1 = 0$ , а так как  $X(a) = 0$ , то  $C_2 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda}a = 0$ . Уравнение  $\operatorname{sh} \sqrt{-\lambda}a = 0$  имеет единственный корень  $\lambda = 0$ , не принадлежащий рассматриваемой области. Следовательно, при  $\lambda < 0$  собственных значений нет.

2.  $\lambda = 0$ . Функция  $X(x) = C_1x + C_2$ , и единственным решением этого уравнения, удовлетворяющим краевым условиям, является  $X(x) \equiv 0$ , откуда  $u \equiv 0$ . Следовательно,  $\lambda = 0$  не является собственным значением.

3.  $\lambda > 0$ . Тогда общее решение уравнения имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Используя краевые условия, получим уравнение для собственных значений  $\sin \sqrt{\lambda}a = 0$ . Отсюда собственные значения задачи (1.21) имеют вид

$$\lambda_k = \frac{\pi^2 k^2}{a^2}, \quad k \geq 1, \quad k - \text{целое},$$

а собственные функции

$$X_k(x) = \sin \frac{\pi k x}{a}.$$

Решение уравнения (1.20) при  $\lambda = \lambda_k$ :

$$Y_k(y) = A_k \operatorname{ch} \frac{\pi k y}{a} + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi k y}{a},$$

где  $A_k$  и  $B_k$  – произвольные постоянные. Таким образом, мы построили счетный набор частных решений задачи (1.19):

$$u_k(x, y) = Y_k(y)X_k(x) = \left( A_k \operatorname{ch} \frac{\pi k y}{a} + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi k y}{a} \right) X_k(x).$$

Решение всей задачи (1.19) ищется в виде ряда Фурье:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y)X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{ch} \lambda_k y + B_k \operatorname{sh} \lambda_k y) X_k(x). \quad (1.22)$$

Из граничного условия по  $y$  в (1.19) при  $y = 0$  получаем

$$u|_{y=0} = g_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x),$$

поэтому  $A_k$  должны совпадать с коэффициентами в разложении в ряд Фурье функции  $g_1$  по собственным функциям  $X_k$  задачи Штурма – Лиувилля:

$$A_k = \frac{(g_1, X_k)}{\|X_k\|^2}.$$

Квадрат нормы равен

$$\|X_k\|^2 = (X_k, X_k) = \int_0^a \sin^2 \frac{\pi k x}{a} dx = \frac{a}{2},$$

поэтому

$$A_k = \frac{2}{a}(g_1, X_k) = \frac{2}{a} \int_0^a g_1(x) X_k(x) dx.$$

Аналогично из граничного условия при  $x = b$

$$u|_{y=b} = g_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{ch} \lambda_k b + B_k \operatorname{sh} \lambda_k b) X_k(x)$$

и

$$A_k \operatorname{ch} \lambda_k b + B_k \operatorname{sh} \lambda_k b = \frac{(g_2, X_k)}{\|X_k\|^2} = \frac{2}{a} \int_0^a g_2(x) X_k(x) dx.$$

Так как  $A_k$  уже найдены, находим отсюда  $B_k$ . Осталось подставить найденные  $A_k, B_k$  в (1.22) и получить решение задачи (1.19).

**Пример 1.4.** Найти решение уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  в прямоугольнике  $0 < x < a, 0 < y < b$ , если на его границе  $u(x, y)$  принимает следующие значения:

$$u|_{x=0} = A \sin \frac{\pi y}{b}, \quad u|_{x=a} = 0, \quad u|_{y=0} = B \sin \frac{\pi x}{a}, \quad u|_{y=b} = 0.$$

**Способ 1.** Будем искать решение задачи в виде  $u = v + w$ , где функция  $v$  удовлетворяет однородным граничным условиям по переменной  $y$ :

$$\Delta v = 0; \quad v|_{y=0} = v|_{y=b} = 0, \quad v|_{x=0} = A \sin \frac{\pi y}{b}, \quad v|_{x=a} = 0, \quad (1.23)$$

а  $w$  – по переменной  $x$ :

$$\Delta w = 0; \quad w|_{x=0} = w|_{x=a} = 0, \quad w|_{y=0} = B \sin \frac{\pi x}{a}, \quad w|_{y=b} = 0. \quad (1.24)$$

Задача (1.24) представляет собой частный случай задачи (1.19). Поэтому ее решение ищем в виде

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{ch} \frac{\pi k}{a} y + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi k}{a} y) \sin \frac{\pi k x}{a}. \quad (1.25)$$

Из граничных условий получаем разложение соответствующих функций в ряд Фурье

$$w|_{y=0} = B \sin \frac{\pi x}{a} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{\pi k x}{a},$$

$$w|_{y=b} = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{ch} \frac{\pi k}{a} b + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi k}{a} b) \sin \frac{\pi k x}{a}.$$

Так как они с точностью до постоянного множителя совпадают с собственными функциями задачи Штурма – Лиувилля, приравниваем коэффициенты при одинаковых собственных функциях  $\sin \frac{\pi k x}{a}$ . Тогда  $A_k = 0$  при  $k \neq 1$  и лишь  $A_1 = B$ . Из второго разложения следует

$$A_k \operatorname{ch} \frac{\pi k b}{a} + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi k b}{a} = 0, \quad \forall k.$$

Поэтому  $B_k = 0$  при  $\forall k \neq 1$ . Для  $k = 1$  имеем

$$B_1 = -A_1 \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi k b}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi k b}{a}} = -B \operatorname{cth} \frac{\pi k b}{a}.$$

Подставляя найденные коэффициенты  $A_k$  и  $B_k$  в (1.25), получим

$$w(x, y) = B \left( \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} - \operatorname{cth} \frac{\pi b}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{a} \right) \sin \frac{\pi x}{a} = B \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}.$$

Решение  $v(x, y)$  задачи (1.23) может быть получено из решения  $w(x, y)$  задачи (1.24) путем замены  $x$  на  $y$ ,  $a$  на  $b$  и  $A$  на  $B$ :

$$v(x, y) = A \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{b} a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Окончательно получаем

$$u(x, y) = A \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi a}{b}} \sin \frac{\pi y}{b} + B \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}.$$

**Способ 2.** Можно было сразу заметить, что функция  $\sin \frac{\pi x}{a}$  является собственной функцией, а также удовлетворяет граничным условиям при  $x = 0$  и  $x = a$ . Поэтому можно было сразу искать решение задачи (1.24) в виде

$$w(x, y) = f(y) \sin \frac{\pi x}{a}.$$

Подставляя  $w$  в (1.24), получим

$$f'' - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 f = 0.$$

Из второй пары граничных условий получаем условия

$$f(0) = B, \quad f(b) = 0.$$

В результате находим

$$f(y) = \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{a}}.$$

Аналогично можно найти функцию  $v$  в виде

$$v(x, y) = g(x) \sin \frac{\pi y}{b}.$$

**Пример 1.5.** Найти распределение потенциала электростатического поля  $u(x, y)$  внутри прямоугольника  $[0 < x < a, 0 < y < b]$ , если потенциал вдоль стороны этого прямоугольника, лежащей на оси  $Oy$ , равен  $v_0$ , а три другие стороны прямоугольника заземлены. Предполагается, что внутри прямоугольника нет электрических зарядов.

*Решение.* Задача сводится к решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0, \quad u|_{x=0} = v_0, \quad u|_{x=a} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=b} = 0.$$

Используя решение задачи из примера 1.4, будем искать решение задачи в виде разложения в ряд Фурье по функциям  $Y_k = \sin \frac{\pi ky}{b}$ :

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k Y_k = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{ch} \frac{\pi kx}{b} + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi kx}{b}) \sin \frac{\pi ky}{b}.$$

Подставляем в искомое решение граничные условия:

$$\begin{aligned} u|_{x=0} = v_0 &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{\pi ky}{b}, \\ u|_{x=a} = 0 &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{ch} \frac{\pi ka}{b} + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi ka}{b}) \sin \frac{\pi ky}{b}. \end{aligned}$$

Находим  $A_k$ :

$$A_k = \frac{(v_0, \sin \frac{\pi ky}{b})}{\|\sin \frac{\pi ky}{b}\|^2} = \frac{2}{b} \int_0^b v_0 \sin \frac{\pi ky}{b} dy = \frac{2}{\pi k} v_0 (1 - (-1)^k).$$

Из второго разложения следует  $A_k \operatorname{ch} \frac{\pi k a}{b} + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi k a}{b} = 0$ , откуда  $B_k = -A_k \operatorname{cth} \frac{\pi k a}{b}$  и

$$X_k(x) = A_k \left( \operatorname{ch} \frac{\pi k x}{b} - \operatorname{cth} \frac{\pi k a}{b} \operatorname{sh} \frac{\pi k x}{b} \right) = A_k \operatorname{ch} \frac{\pi k x}{b} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi k a}{b} - \operatorname{sh} \frac{\pi k x}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi k a}{b}}.$$

Так как четные  $A_k = B_k = 0$ , то после замены индекса суммирования  $k = 2n+1$ , применив формулу разности гиперболических синусов, получим ответ

$$u(x, y) = \frac{4v_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n+1)(a-x)}{b} \sin \frac{\pi(2n+1)y}{b}}{(2n+1) \operatorname{sh} \frac{\pi(2n+1)a}{b}}.$$

**Задание 1.6.** Найти распределение потенциала электростатического поля внутри коробки прямоугольного сечения  $-a < x < a$ ,  $-b < y < b$ , две противоположные грани которой ( $x = a$  и  $x = -a$ ) имеют потенциал  $v_0$ , а две другие ( $y = b$ ,  $y = -b$ ) заземлены.

**Задание 1.7.** Решить краевую задачу об определении распределения потенциала электростатического поля  $u(x, y)$  внутри коробки прямоугольного сечения  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ , если

1. левая грань ( $x = 0$ ) имеет потенциал  $\varphi_0$ , на правой ( $x = a$ ) плотность зарядов равна нулю, нижняя  $y = 0$  заземлена, а на верхней ( $y = b$ ) плотность зарядов равна  $\sigma_0$ ;

2. левая грань ( $x = 0$ ) заземлена, на верхней ( $y = b$ ) плотность зарядов равна нулю, нижняя ( $y = 0$ ) имеет потенциал  $\varphi_0$ , а на правой ( $x = a$ ) плотность зарядов равна  $\sigma_0$ ;

3. левая ( $x = 0$ ) и нижняя ( $y = 0$ ) грани заземлены, верхняя ( $y = b$ ) имеет потенциал  $\varphi_0$ , а на правой ( $x = a$ ) плотность зарядов равна  $\sigma_0$ ;

4. на левой ( $x = 0$ ) и верхней ( $y = b$ ) гранях плотность зарядов равна  $\sigma_0$ , на правой грани ( $x = a$ ) плотность зарядов равна нулю, а нижняя ( $y = 0$ ) заземлена;

5. левая ( $x = 0$ ) и нижняя ( $y = 0$ ) грани заземлены, на верхней ( $y = b$ ) плотность зарядов равна  $\sigma_0$ , а правая ( $x = a$ ) имеет потенциал  $\varphi_0$

6. левая грань ( $x = 0$ ) имеет потенциал  $\varphi_0$ , на нижней грани ( $y = 0$ ) плотность зарядов равна  $\sigma_0$ , правая грань ( $x = a$ ) заземлена, на верхней грани ( $y = b$ ) плотность зарядов равна нулю;

7. нижняя грань ( $y = 0$ ) имеет потенциал  $\varphi_0$ , на левой грани ( $x = 0$ ) плотность зарядов равна  $\sigma_0$ , правая ( $x = a$ ) и верхняя ( $y = b$ ) грани заземлены;

8. левая ( $x = 0$ ) и верхняя грани ( $y = b$ ) имеют потенциал  $\varphi_0$ , а нижняя ( $y = 0$ ) и правая ( $x = a$ ) грани заземлены.

**Задание 1.8.** Найти стационарное распределение температуры  $u(x, y)$  в прямоугольной однородной пластинке  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ , если две ее стороны ( $x = a$  и  $y = b$ ) покрыты тепловой изоляцией, две другие стороны ( $x = 0$  и  $y = 0$ ) поддерживаются при нулевой температуре, а в пластинке выделяется тепло с постоянной плотностью  $q$ .

**Пример 1.6.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \frac{\pi}{2}); \\ u_x|_{x=0} &= 0, & u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \\ u_y|_{y=0} &= 2 + 3 \cos 4x, & u|_{y=\pi} = x^2. \end{aligned} \quad (1.26)$$

*Решение.* Будем решать задачу методом разделения переменных. Для этого подставляем произведение функций  $u(x, y) = X(x)Y(y)$  в уравнение Лапласа и разделяем переменные:

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Так как значения функций различных аргументов  $x$  и  $y$  совпадают при любых значениях этих аргументов, это означает, что функции являются константами и

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Подставляя  $u(x, y) = X(x)Y(y)$  в граничные условия по  $x$ , получим

$$X'(0) = 0, \quad X'(\frac{\pi}{2}) = 0. \quad (1.27)$$

Таким образом, мы приходим к уравнению

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \quad (1.28)$$

и задаче Штурма – Лиувилля

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X'(0) = X'(\frac{\pi}{2}) = 0. \end{cases} \quad (1.29)$$

Найдем собственные функции и собственные значения задачи (1.29).

1.  $\lambda < 0$ . Тогда общее решение уравнения имеет вид

$$X(x) = C_1 \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda}x + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda}x.$$

Так как  $X(0) = 0$ , то  $C_1 = 0$ , а так как  $X(a) = 0$ , то  $C_2 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda}a = 0$ . Уравнение  $\operatorname{sh} \sqrt{-\lambda}a = 0$  имеет единственный корень  $\lambda = 0$ , не принадлежащий рассматриваемой области. Следовательно, при  $\lambda < 0$  собственных значений нет.

2.  $\lambda = 0$ . Тогда  $X(x) = C_1x + C_2$ . Подставляя условия (1.27), получим  $X'(0) = X'(\pi/2) = C_1 = 0$ , откуда функция  $X(x) = C_2$  является собственной функцией при любом значении  $C_2$ . Если положить  $C_2 = 1$ , то

$$X_0(x) = 1, \quad \lambda_0 = 0$$

будут отвечающими друг другу собственной функцией и собственным значением соответственно.

3.  $\lambda > 0$ . Тогда общее решение уравнения имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Используя первое краевое условие, получим

$$X'(0) = \left( -C_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x + C_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x \right) \Big|_{x=0} = C_2 \sqrt{\lambda} = 0,$$

откуда  $C_2 = 0$ , так как  $\lambda = 0$  не принадлежит рассматриваемой области. Используя второе краевое условие, получим уравнение

$$X' \left( \frac{\pi}{2} \right) = -C_1 \sqrt{\lambda} \sin \frac{\pi \sqrt{\lambda}}{2} = 0.$$

Решая его, находим собственные значения задачи (1.29):  $\lambda_k = 4k^2$ ,  $k \geq 1$ ,  $k$  – целое, а соответствующие им собственные функции при  $C_1 = 1$  имеют вид  $X_k(x) = \cos 2kx$ .

Решение уравнения (1.28) при  $\lambda = \lambda_k$ :

$$Y_0 = A_0 + B_0y, \quad Y_k(y) = A_k \operatorname{ch} 2ky + B_k \operatorname{sh} 2ky, \quad k \geq 1,$$

где  $A_k$  и  $B_k$  – произвольные постоянные. Таким образом, мы построили счетный набор частных решений задачи (1.26):

$$u_k(x, y) = Y_k(y)X_k(x),$$

а общее решение задачи (1.26) ищется в виде ряда Фурье:

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(y) X_k(x) = A_0 + B_0 y + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{ch} 2ky + B_k \operatorname{sh} 2ky) X_k(x).$$

Из граничного условия по  $y$  в (1.26) при  $y = 0$  получаем

$$\begin{aligned} u_y|_{y=0} &= \left( B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (2kA_k \operatorname{sh} 2ky + 2kB_k \operatorname{ch} 2ky) X_k(x) \right) \Big|_{y=0} = \\ &= B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2kB_k \cos 2kx = 2 + 3 \cos 4x. \end{aligned}$$

Поэтому числа  $B_0$  и  $2kB_k$ ,  $k \geq 1$  должны совпадать с коэффициентами в разложении в ряд Фурье функции  $2 + 3 \cos 4x$  по собственным функциям  $X_k$  задачи Штурма – Лиувилля. Заметим, что функция  $2 + 3 \cos 4x$  уже разложена в ряд Фурье, поэтому можно, приравняв коэффициенты при одинаковых функциях, сразу выписать значения  $B_0 = 2$ ,  $2 \cdot 2 \cdot B_4 = 3$ , откуда

$$B_0 = 2, \quad B_2 = \frac{3}{4}, \quad B_k = 0, \quad k \in N \setminus \{2\}.$$

Аналогично из граничного условия по  $y$  в (1.26) при  $y = \pi$  получаем разложение в ряд Фурье по собственным функциям  $X_k$  функции  $x^2$ :

$$u|_{y=\pi} = A_0 + B_0 \pi + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{ch} 2\pi k + B_k \operatorname{sh} 2\pi k) X_k(x) = x^2.$$

Следовательно,

$$A_0 + B_0 \pi = \frac{(x^2, X_0)}{\|X_0\|^2}, \quad A_k \operatorname{ch} 2k\pi + B_k \operatorname{sh} 2k\pi = \frac{(x^2, X_k)}{\|X_k\|^2}, \quad k \geq 1.$$

Квадрат нормы равен

$$\|X_0\|^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1^2 dx = \frac{\pi}{2}, \quad \|X_k\|^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(2kx) dx = \frac{\pi}{4}, \quad k \geq 1,$$

поэтому

$$A_0 + B_0 \pi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot 1 dx = \frac{\pi^2}{12},$$

откуда

$$A_0 = \frac{\pi^2}{12} - B_0 \pi = \frac{\pi^2}{12} - 2\pi.$$

Дважды интегрируя по частям, найдем коэффициенты

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{(x^2, X_k)}{\|X_k\|^2} = A_k \operatorname{ch} 2\pi k + B_k \operatorname{sh} 2\pi k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(2kx) dx = \\ &= \left( \frac{2x^2}{\pi k} \sin 2kx + \frac{2x}{\pi k^2} \cos 2kx - \frac{1}{\pi k^3} \sin 2kx \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\cos \pi k}{k^2} = \frac{(-1)^k}{k^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$A_k = \frac{C_k}{\operatorname{ch} 2\pi k} - B_k \operatorname{th} 2\pi k.$$

Тогда

$$Y_0 = \frac{\pi^2}{12} - 2\pi + 2y; \quad Y_k = \frac{C_k}{\operatorname{ch} 2\pi k} \operatorname{ch} 2ky + B_k (\operatorname{sh} 2ky - \operatorname{th} 2\pi k \operatorname{ch} 2ky),$$

а решение исходной задачи:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{\pi^2}{12} - 2\pi + 2y + \frac{3}{4} (\operatorname{sh} 4y - \operatorname{th} 4\pi \operatorname{ch} 4y) \cos 4x + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 \operatorname{ch} 2\pi k} \operatorname{ch} 2ky \cos 2kx. \end{aligned}$$

**Задание 1.9.** Решить методом Фурье краевые задачи для уравнения Лапласа со следующими граничными условиями. Проверить выполнение граничных условий:

1.  $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{y=0} = x, \quad u_y|_{y=\pi} = 2 \sin^2 x;$
2.  $u|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{y=0} = 2 \sin \frac{3x}{2}, \quad u_y|_{y=\pi} = x;$
3.  $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{y=0} = \cos \frac{x}{2}, \quad u|_{y=\pi} = 2 \cos^2 x;$
4.  $u_x|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{y=0} = 1 - x, \quad u_y|_{y=\pi} = 3 \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2};$
5.  $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{y=0} = \sin x, \quad u_y|_{y=\pi} = 1 + 2 \cos x - \cos 2x;$
6.  $u|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{y=0} = 1, \quad u_y|_{y=\pi} = \sin \frac{x}{2} + 3 \sin \frac{3x}{2};$
7.  $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{y=0} = \pi \sin \frac{x}{2}, \quad u_y|_{y=\pi} = 1 + 2 \sin^2 x;$
8.  $u|_{x=0} = \cos \frac{y}{2} + 3 \cos \frac{3y}{2}, \quad u_x|_{x=\pi} = y + 1, \quad u_y|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0;$
9.  $u_x|_{x=0} = \cos^2 y, \quad u|_{x=\pi} = y, \quad u_y|_{y=0} = u_y|_{y=\frac{\pi}{2}} = 0;$
10.  $u_x|_{x=0} = 2 \sin 2y + 4 \sin 4y, \quad u_x|_{x=\pi} = y, \quad u|_{y=0} = u|_{y=\frac{\pi}{2}} = 0;$

11.  $u_x|_{x=0} = \sin^2 y$ ,  $u|_{x=\pi} = 3y$ ,  $u_y|_{y=0} = u_y|_{y=\frac{\pi}{2}} = 0$ ;
12.  $u|_{x=0} = -1$ ,  $u_x|_{x=\pi} = \sin y \cos y$ ,  $u|_{y=0} = u|_{y=\frac{\pi}{2}} = 0$ ;
13.  $u|_{x=0} = y$ ,  $u_x|_{x=\pi} = \cos^2 \frac{y}{2}$ ,  $u_y|_{y=0} = u_y|_{y=\pi} = 0$ ;
14.  $u_x|_{x=0} = -1$ ,  $u|_{x=\pi} = \cos 3y$ ,  $u_y|_{y=0} = u|_{y=\frac{\pi}{2}} = 0$ .

## 1.4. Краевые задачи для шара и шарового слоя

### Формула Пуассона для задачи Дирихле для шара

Рассмотрим задачу Дирихле для шара  $T_R$ , ограниченного сферой  $S_R$ :

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad (|x| < R), \\ u|_{S_R} &= f(x). \end{aligned}$$

В классе функций  $u \in C^2(\overline{T}_R)$  решение этой задачи дает формула Пуассона

$$u(x) = \frac{1}{|S_1|R} \int_{S_R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n} f(y) dS, \quad (1.30)$$

где  $n$  – размерность пространства,  $|S_1|$  – площадь поверхности единичной сферы в  $n$ -мерном пространстве.

Очевидно, что при  $n = 2$  эта формула совпадает с формулой Пуассона (1.14) для внутренней задачи Дирихле для круга.

#### 1.4.1. Частный случай $u = u(r, \theta)$

##### Краевые задачи для шарового слоя

Рассмотрим сначала применение метода разделения переменных к уравнению Лапласа в пространстве для шара радиуса  $R$  или шарового слоя  $R_1 < r < R_2$  в том случае, когда решение в явном виде не зависит от угла  $\varphi$ , то есть

$$u = u(r, \theta).$$

Тогда уравнение Лапласа в сферической системе координат имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (1.31)$$

Полагая  $u = Z(r)W(\theta)$  и разделяя в (1.31) переменные, получаем

$$\frac{1}{Z} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dZ}{dr} \right) = \lambda, \quad (1.32)$$

$$\frac{1}{W \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dW}{d\theta} \right) = -\lambda. \quad (1.33)$$

Вводя в (1.32) и (1.33) вместо  $\lambda$  новую произвольную постоянную  $\nu$ , где

$$\lambda = \nu(\nu + 1),$$

запишем уравнение (1.32) в следующем виде:

$$r^2 \frac{d^2 Z}{dr^2} + 2r \frac{dZ}{dr} - \nu(\nu + 1)Z = 0. \quad (1.34)$$

Уравнение (1.34) является уравнением Эйлера, и его решение ищется так же, как решение уравнения (1.6), и имеет вид

$$Z(r) = C_1 r^\nu + C_2 r^{-(\nu+1)}. \quad (1.35)$$

Уравнение (1.33) заменой переменной  $\xi = \cos \theta$  приводится к виду

$$\frac{d}{d\xi} \left[ (1 - \xi^2) \frac{dy}{d\xi} \right] + \nu(\nu + 1)y = 0, \quad (1.36)$$

где

$$y = W(\arccos \xi).$$

Уравнение (1.36) называется дифференциальным уравнением Лежандра и имеет ограниченные на отрезке  $[-1, 1]$  решения в том и только в том случае, когда  $\nu = k \geq 0$ ,  $k$  – целое.

Решениями уравнения (1.36) при  $\nu = k$  являются полиномы Лежандра  $y = P_k(\xi)$ , образующие полную ортогональную систему в  $L_2(-1, 1)$ . Следовательно, всякая функция  $f \in L_2(-1, 1)$  разлагается в ряд Фурье по полиномам Лежандра:

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(f, P_k)}{\|P_k\|^2} P_k(\xi).$$

Этот ряд сходится в  $L_2(-1, 1)$ , причем

$$(f, P_k) = \int_{-1}^1 f(\xi) P_k(\xi) d\xi, \quad \|P_k\|^2 = \int_{-1}^1 P_k^2(\xi) d\xi = \frac{2}{2k+1}.$$

Для полиномов Лежандра справедлива формула Родрига

$$P_k(\xi) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k (\xi^2 - 1)^k}{d\xi^k},$$

из которой легко получить, например,

$$P_0(\xi) = 1, P_1(\xi) = \xi, P_2(\xi) = \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1), P_3(\xi) = \frac{1}{2}(5\xi^3 - 3\xi).$$

Также можно вычислить полиномы Лежандра по рекуррентным формулам

$$P_{k+1}(\xi) = \frac{2k+1}{k+1} \xi P_k(\xi) - \frac{k}{k+1} P_{k-1}(\xi).$$

Таким образом, из (1.35) и (1.36) находим решение исходной краевой задачи для шарового слоя:

$$u(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(r) W_k(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} [A_k r^k + B_k r^{-(k+1)}] P_k(\cos \theta). \quad (1.37)$$

Коэффициенты  $A_k$  и  $B_k$  определяются из граничных условий.

### Внутренние и внешние краевые задачи для шара

Решение внутренней задачи Дирихле (и других внутренних задач для уравнения Лапласа) в случае, когда краевые условия заданы на сфере  $r = R$  и зависят только от  $\theta$ , можно получить из (1.37), отбросив неограниченные при  $r \rightarrow 0$  слагаемые:

$$u(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k r^k P_k(\cos \theta). \quad (1.38)$$

Аналогично можно поступить для внешней задачи – отбросить неограниченные на бесконечности слагаемые:

$$u(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k r^{-(k+1)} P_k(\cos \theta).$$

Коэффициенты  $A_k$  и  $B_k$  определяются из краевых условий. Так, например, коэффициенты  $A_k$  при условии  $u|_{r=R} = f(\theta)$  равны

$$A_k = \frac{(f, P_k)}{\|P_k\|^2 R^k} = \frac{2k+1}{2R^k} \int_0^\pi f(\theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

**Пример 1.7.** Найти функцию  $u$ , гармоническую внутри шара радиуса  $R$  с центром в начале координат и такую, что

$$u|_{r=R} = \cos^2 \theta.$$

*Решение.* Решение внутренней задачи Дирихле для шара радиуса  $R$  следует искать в виде ряда (1.38). Коэффициенты  $A_k$  определяются из краевого условия:

$$u|_{r=R} = \cos^2 \theta = \sum_{k=0}^{\infty} A_k R^k P_k(\cos \theta). \quad (1.39)$$

Очевидно, что граничное условие представляет собой многочлен второй степени по  $\xi = \cos \theta$  и поэтому разлагается в конечный ряд Фурье по полиномам Лежандра степени не выше второй. Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов:

$$\xi^2 = aP_0(\xi) + bP_1(\xi) + cP_2(\xi) = a + b\xi + \frac{c}{2}(3\xi^2 - 1).$$

Отсюда имеем систему

$$\begin{cases} a - \frac{1}{2}c = 0, \\ b = 0, \\ \frac{3}{2}c = 1. \end{cases}$$

Решение этой системы:  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = 0$ ,  $c = \frac{2}{3}$ . Итак,

$$\xi^2 = \frac{1}{3}P_0 + \frac{2}{3}P_2.$$

Приравниваем в (1.39) коэффициенты при соответствующих полиномах Лежандра:  $A_0 = \frac{1}{3}$ ,  $A_2 R^2 = \frac{2}{3}$ . Отсюда  $A_2 = \frac{2}{3R^2}$ . Следовательно, решение имеет вид

$$u(r, \theta) = \frac{1}{3}P_0(\cos \theta) + \frac{2r^2}{3R^2}P_2(\cos \theta) = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) + \frac{r^2}{R^2} \cos^2 \theta.$$

**Задание 1.10.** Найти функцию  $u$ , гармоническую внутри шара радиуса  $R$  с центром в начале координат и такую, что

1.  $u|_{r=R} = \sin^2 2\theta$ ;
2.  $u_r|_{r=R} = 1 - 3 \cos^2 \theta$ ;
3.  $u|_{r=R} = \cos 2\theta$ ;
4.  $u|_{r=R} = \cos^3 \theta$ ;
5.  $u_r|_{r=R} = \sin^2 \theta \cos \theta$ ;
6.  $u|_{r=R} = \sin^2 \theta$ ;
7.  $u|_{r=R} = \cos 3\theta$ ;
8.  $u_r|_{r=R} = \cos \theta$ .

**Задание 1.11.** Найти функцию  $u$ , гармоническую вне шара радиуса  $R$  с центром в начале координат и такую, что

- |   |   |
|---|---|
| 1. $u_r _{r=R} = \sin^2 \theta;$        | 5. $(3u_r - u) _{r=R} = \sin^2 \theta;$ |
| 2. $(u_r - u) _{r=R} = \sin^2 \theta;$  | 6. $u_r _{r=R} = \cos 2\theta;$         |
| 3. $u_r _{r=R} = \cos^3 \theta;$        | 7. $(2u_r + u) _{r=R} = \sin^2 \theta;$ |
| 4. $(u_r - 2u) _{r=R} = \sin^2 \theta;$ | 8. $u _{r=R} = \cos^3 \theta.$          |

**Задание 1.12.** Найти функцию, гармоническую внутри шарового слоя  $1 < r < 2$  и такую, что  $u_r|_{r=1} = f_1(\theta); u|_{r=2} = f_2(\theta)$ , где

- |  |  |
|--|--|
| 1. $f_1(\theta) = \cos 2\theta; f_2(\theta) = 1 + \cos 2\theta;$ | 5. $f_1(\theta) = \sin^2 \theta; f_2(\theta) = \cos 2\theta;$    |
| 2. $f_1(\theta) = \cos \theta; f_2(\theta) = 3 + \cos^2 \theta;$ | 6. $f_1(\theta) = 1 + \sin^2 \theta; f_2(\theta) = \cos \theta;$ |
| 3. $f_1(\theta) = \sin^2 \theta; f_2(\theta) = \cos \theta;$     | 7. $f_1(\theta) = \cos 3\theta; f_2(\theta) = 1;$                |
| 4. $f_1(\theta) = \cos^2 \theta; f_2(\theta) = \cos \theta;$     | 8. $f_1(\theta) = \cos \theta; f_2(\theta) = \cos 2\theta.$      |

**Задание 1.13.** Найти стационарную температуру внутренних точек полусферы радиуса  $R$ , если сферическая поверхность поддерживается при постоянной температуре  $T_0$ , а основание полусферы – при нулевой температуре.

### 1.4.2. Общий случай

Запишем уравнение Лапласа  $\Delta u = 0$  в сферических координатах  $(r, \varphi, \theta)$ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (1.40)$$

Полагая  $u(r, \varphi, \theta) = Z(r)Y(\theta, \varphi)$ , из (1.40) находим

$$r^2 \frac{d^2 Z}{dr^2} + 2r \frac{dZ}{dr} - \lambda Z = 0, \quad (1.41)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \lambda Y = 0. \quad (1.42)$$

Будем искать решения уравнения (1.42) в виде

$$Y(\theta, \varphi) = W(\theta)\Phi(\varphi).$$

Мы получим:

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0, \quad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \quad (1.43)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dW}{d\theta} \right) + \left( \lambda - \frac{\mu}{\sin^2 \theta} \right) W = 0. \quad (1.44)$$

В силу  $2\pi$  – периодичности  $\Phi(\varphi)$  получим  $\mu = m^2$  ( $m$  – целое) и

$$\Phi_m(\varphi) = C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi. \quad (1.45)$$

Уравнение (1.44) после замены независимой переменной  $\xi = \cos \theta$  имеет вид

$$\frac{d}{d\xi} \left[ (1 - \xi^2) \frac{dX(\xi)}{d\xi} \right] + \left( \lambda - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right) X(\xi) = 0, \quad X = W(\arccos \xi). \quad (1.46)$$

Требование того, чтобы функция  $u$  была ограничена на единичной сфере, приводит к требованию ограниченности решений уравнения (1.46) на отрезке  $[-1, 1]$ , что возможно лишь при  $\lambda = k(k+1)$ , где  $k$  – целое. Ограниченными решениями уравнения (1.46) при  $\lambda = k(k+1)$  являются функции

$$P_k^{(m)}(\xi) = (1 - \xi^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_k(\xi)}{d\xi^m}, \quad (1.47)$$

где  $P_k(\xi)$  – полиномы Лежандра. Функции, определяемые формулой (1.47), называются присоединенными полиномами Лежандра. Очевидно, что

$$P_k^{(m)}(\xi) = 0 \quad \text{при } m > k.$$

Таким образом, для каждого  $k$  мы имеем  $2k + 1$  линейно независимых, ограниченных на единичной сфере частных решений уравнения (1.42), которые называются сферическими функциями:

$$P_k(\cos \theta); \quad P_k^{(m)}(\cos \theta) \cos m\varphi; \quad P_k^{(m)}(\cos \theta) \sin m\varphi, \quad m = 1, 2, \dots, k.$$

Умножая эти решения на произвольные постоянные и складывая, мы получим общий вид сферической функции порядка  $k$ :

$$Y_k(\theta, \varphi) = a_0 P_k(\cos \theta) + \sum_{m=1}^k (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi) P_k^{(m)}(\cos \theta). \quad (1.48)$$

Так как частные решения уравнения (1.41) при  $\lambda = k(k+1)$  имеют вид

$$Z_k^{(1)}(r) = r^k, \quad Z_k^{(2)}(r) = r^{-(k+1)},$$

то искомые частные решения уравнения (1.40) таковы:

$$u_k^{(1)} = \left( a_0^{(1)} P_k(\cos \theta) + \sum_{m=1}^k (a_m^{(1)} \cos m\varphi + b_m^{(1)} \sin m\varphi) P_k^{(m)}(\cos \theta) \right) r^k,$$

$$u_k^{(2)} = \left( a_0^{(2)} P_k(\cos \theta) + \sum_{m=1}^k (a_m^{(2)} \cos m\varphi + b_m^{(2)} \sin m\varphi) P_k^{(m)}(\cos \theta) \right) r^{-(k+1)}.$$

Решение внутренней задачи Дирихле (и других внутренних задач для уравнения Лапласа) следует искать в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^k Y_k(\theta, \varphi). \quad (1.49)$$

Решение внешней задачи Дирихле (и других внешних задач) следует искать в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^{(k+1)} Y_k(\theta, \varphi). \quad (1.50)$$

Наконец, функцию, гармоническую в сферическом слое и принимающую заданные значения на границе этого слоя, нужно искать в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(1)}(r, \varphi, \theta) + \sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(2)}(r, \varphi, \theta). \quad (1.51)$$

Произвольные постоянные находятся из граничных условий.

Выпишем несколько присоединенных полиномов Лежандра и сферических функций  $Y_k(\theta, \varphi)$  в явном виде для  $k = 0, 1, 2, 3$ :

$$P_1^{(1)}(\cos \theta) = \sin \theta; \quad P_2^{(1)}(\cos \theta) = 3 \sin \theta \cos \theta;$$

$$P_2^{(2)}(\cos \theta) = 3 \sin^2 \theta; \quad P_3^{(1)}(\cos \theta) = \frac{3}{2}(5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta;$$

$$P_3^{(2)}(\cos \theta) = 15 \sin^2 \theta \cos \theta; \quad P_3^{(3)}(\cos \theta) = 15 \sin^3 \theta;$$

$$P_k^{(k)}(\cos \theta) = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sin^k \theta;$$

$$Y_0(\theta, \varphi) = a_0,$$

$$Y_1(\theta, \varphi) = a_1 \cos \theta + (b_1 \cos \varphi + c_1 \sin \varphi) \sin \theta,$$

$$Y_2(\theta, \varphi) = a_2(3 \cos^2 \theta - 1) + (b_2 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi) \sin \theta \cos \theta +$$

$$+ (d_2 \cos 2\varphi + e_2 \sin 2\varphi) \sin^2 \theta,$$

$$Y_3(\theta, \varphi) = a_3(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) + (b_3 \cos \varphi + c_3 \sin \varphi) \sin \theta(15 \cos^2 \theta - 3) +$$

$$+ (d_3 \cos 2\varphi + e_3 \sin 2\varphi) \sin^2 \theta \cos \theta + (f_3 \cos 3\varphi + g_3 \sin 3\varphi) \sin^3 \theta.$$

**Пример 1.8.** Найти функцию, гармоническую внутри единичной сферы и такую, что

$$u|_{r=1} = \cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \sin^2 \theta.$$

*Решение.* Для внутренней задачи Дирихле ищем решение в виде (1.49). Граничное условие записать в следующем виде:

$$u(1, \theta, \varphi) = \cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \sin^2 \theta = \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos 2\varphi - \sin \frac{\pi}{3} \sin 2\varphi\right) \sin^2 \theta.$$

Очевидно, что данная функция есть частный случай сферической функции  $Y_2$  при

$$a_2 = b_2 = c_2 = 0, \quad d_2 = \cos \frac{\pi}{3}, \quad e_2 = -\sin \frac{\pi}{3}.$$

Поэтому решение:

$$u(r, \theta, \varphi) = r^2 Y_2(\theta, \varphi) = r^2 \cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \sin^2 \theta.$$

**Задание 1.14.** Найти функцию  $u$ , гармоническую внутри шара радиуса  $R$  с центром в начале координат и такую, что

1.  $u|_{r=R} = \sin^3 \theta \sin\left(3\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$ ;      5.  $u|_{r=R} = 3 \sin \theta (\cos \varphi + \cos \varphi \cos \theta - \sin \theta)$ ;
2.  $u|_{r=R} = (\sin \theta + \sin 2\theta) \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$ ;      6.  $u|_{r=R} = \sin^2 \theta \cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin \theta \sin \varphi$ ;
3.  $u|_{r=R} = (\sin \theta + \sin \varphi) \sin \theta$ ;      7.  $u|_{r=R} = \left(1 + \sin \theta \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\right) \cos \theta$ ;
4.  $u|_{r=R} = \cos \theta \sin^2 \theta \sin\left(2\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$ ;      8.  $u|_{r=R} = \cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{7}\right) \sin^2 \theta$ .

**Задание 1.15.** Найти функцию  $u$ , гармоническую вне шара радиуса  $R$  с центром в начале координат и такую, что

1.  $u_r|_{r=R} = \sin \theta \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$ ;      5.  $u|_{r=R} = \cos^2 \theta + \sin \varphi \sin \theta$ ;
2.  $u|_{r=R} = \cos^2 \theta \sin \theta \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)$ ;      6.  $u|_{r=R} = \sin \varphi \sin \theta (\cos \theta + 1)$ ;
3.  $u|_{r=R} = \sin^{100} \theta \sin 100\varphi$ ;      7.  $u|_{r=R} = 2 \sin \varphi \sin \theta (\cos \theta + \cos \varphi \sin \theta + 1)$ ;
4.  $u|_{r=R} = \sin^3 \theta \cos \theta \cos\left(3\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$ ;      8.  $u|_{r=R} = \sin^2 \theta \cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$ .

**Задание 1.16.** Найти функцию, гармоническую внутри шарового слоя  $1 < r < 2$  и такую, что

$$u|_{r=1} = f_1(\theta, \varphi); \quad u|_{r=2} = f_2(\theta, \varphi),$$

где

1.  $f_1 = 3 \sin^2 \theta \sin 2\varphi; \quad f_2 = 3 \cos \theta;$
2.  $f_1 = 7 \sin \theta \cos \varphi; \quad f_2 = 7 \cos \theta;$
3.  $f_1 = \sin^2 \theta (3 - \sin 2\varphi); \quad f_2 = 4f_1;$
4.  $f_1 = 12 \sin \theta \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos \varphi; \quad f_2 = 0;$
5.  $f_1 = 31 \sin \varphi \sin 2\theta; \quad f_2 = 31 \cos 2\varphi \sin^2 \theta;$
6.  $f_1 = \sin^2 \theta \sin 2\varphi; \quad f_2 = \sin^2 \theta \cos 2\varphi;$
7.  $f_1 = \cos \varphi \sin 2\theta; \quad f_2 = \sin \varphi \sin 2\theta;$
8.  $f_1 = \cos \theta; \quad f_2 = \cos \varphi (12 \sin \theta - 15 \sin^3 \theta).$

## Глава 2

# Функция Грина оператора Лапласа

**Определение 2.6.** Функцией Грина (внутренней) задачи Дирихле для области  $\Omega \subset R^3$  называется функция  $G(x, y)$ , обладающая следующими свойствами:

1.  $G(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} + g(x, y)$ , где функция  $g$  – гармоническая в  $\Omega$  и непрерывная в  $\bar{\Omega}$  по  $x$  при каждом  $y \in \Omega$ .

2.  $G(x, y)|_{x \in \partial\Omega} = 0$  при каждом  $y \in \Omega$ .

Если  $\Omega$  – неограниченная область, то требуется также, чтобы функция Грина была регулярной на бесконечности, то есть

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} G(x, y) = 0.$$

Если  $\Omega$  – ограниченная область и  $\partial\Omega$  – достаточно гладкая поверхность, то функция  $G$  существует, единственна, имеет правильную нормальную производную  $\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_x}$  на  $\partial\Omega$  и симметрична, то есть

$$G(x, y) = G(y, x), \quad x \in \Omega, \quad y \in \Omega.$$

Если решение  $u(x)$  внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(x), \\ u|_{\partial\Omega} &= \varphi(x), \end{aligned}$$

где  $f \in C(\bar{\Omega})$  и  $\varphi(x) \in C(\partial\Omega)$ , имеет правильную нормальную производную на  $\partial\Omega$ , то оно определяется формулой

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi(y) dS_y + \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy. \quad (2.1)$$

Для ряда областей функцию Грина можно найти методом отражений.

### 2.1. Метод отражений

Идея метода отражений состоит в следующем: так как значение потенциала электростатического поля, создаваемого зарядом  $q$ , находящимся в точке  $x$  и измеряемое в точке  $y$ , равно  $q/|x-y|$ , то первое слагаемое функции Грина можно интерпретировать как потенциал поля, создаваемого зарядом  $1/4\pi$ , измеренный в точке  $y$ . Тогда второе слагаемое  $g(x, y)$  можно

рассматривать как сумму потенциалов полей, создаваемых фиктивными зарядами  $q_1, q_2, \dots$ , расположенными вне области  $\Omega$  в точках  $y_1, y_2, \dots \notin \Omega$ , таких чтобы на границе области  $\partial\Omega$  сумма потенциалов полей, создаваемых всеми зарядами, включая заряд  $\frac{1}{4\pi}$ , была равна нулю:

$$G(x, y)|_{\partial\Omega} = \left( \frac{1}{4\pi|x-y|} + \frac{q_1}{4\pi|x-y_1|} + \frac{q_2}{4\pi|x-y_2|} + \dots \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Построенная функция действительно является функцией Грина, так как функции  $\frac{q_i}{4\pi|x-y_i|}$  гармонические везде, кроме точек  $y_i$ . Однако эти точки не принадлежат области  $\Omega$ , следовательно, функция  $G(x, y)$  гармоническая в любой ее точке.

**Пример 2.1.** Построить функцию Грина для шара в  $R^3$ .

*Решение.* Пусть  $T_R$  – шар радиуса  $R, y \in T_R, y \neq 0$  и

$$y^* = \frac{R^2}{|y|^2} y -$$

точка, симметричная точке  $y$  относительно шара  $T_R$ . Ищем функцию Грина в виде

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{q}{4\pi|x-y^*|},$$

где  $q$  – величина, которую подберем так, чтобы функция  $G(x, y)$  на границе шара  $S_R$  обратилась в ноль. Так как для точек, симметричных относительно сферы, выполняется

$$|y||y^*| = R^2,$$

то при  $x \in S_R$  (рис. 2.1) треугольники  $Oxy^*$  и  $Oxy$  подобны.

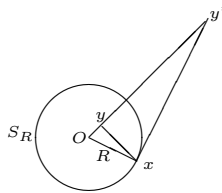


Рис. 2.1

Действительно, угол  $\angle xOy$  у них общий, а длины прилегающих к нему сторон пропорциональны:

$$\frac{R}{|y|} = \frac{|y^*|}{R}.$$

Поэтому пропорциональны и длины третьих сторон треугольников, и при  $x \in S_R$  справедливо соотношение

$$\frac{R}{|y|} = \frac{|x - y^*|}{|x - y|},$$

и, следовательно, при

$$q = \frac{R}{|y|}$$

второе свойство функции Грина будет выполнено. Итак, функция

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi|x - y|} - \frac{R}{4\pi|y||x - y^*|} = \frac{1}{4\pi|x - y|} - \frac{R|y|}{4\pi(|x|y|^2 - yR^2)}$$

есть функция Грина для шара.

Для того чтобы воспользоваться формулой (2.1), вычислим нормальную производную функции Грина на сфере  $S_R$ , учитывая, что нормаль в любой точке сферы направлена по радиусу:

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \Big|_{S_R} = \frac{\partial}{\partial |y|} \left[ \frac{1}{4\pi|x - y|} - \frac{R|y|}{4\pi(|x|y|^2 - yR^2)} \right] \Big|_{|y|=R}.$$

Выразим по теореме косинусов  $|x - y|$  и  $|x - y^*|$  через стороны треугольников  $Oxy$  и  $Oxy^*$  соответственно:

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \Big|_{S_R} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{1}{\sqrt{|x|^2 + \rho^2 - 2|x|\rho \cos \gamma}} - \frac{R}{\sqrt{R^4 + |x|^2 \rho^2 - 2R^2|x|\rho \cos \gamma}} \right] \Big|_{\rho=R},$$

где  $\rho = |y|$  и  $\gamma$  – угол между векторами  $x$  и  $y$ . Вычисляя производную по  $\rho$  и затем подставляя  $\rho = R$ , получим

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \Big|_{S_R} = \frac{|x|^2 - R^2}{4\pi R(R^2 + |x|^2 - 2R|x| \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|x|^2 - R^2}{4\pi R|x - y|^3} \Big|_{y \in S_R}.$$

Заметим, что формула (2.1) для шара  $T_R$  при  $f \equiv 0$  принимает вид

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R} \int_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^3} \varphi(y) dS_y, \quad |x| < R$$

и совпадает с формулой Пуассона (1.30) для внутренней задачи Дирихле для шара  $T_R$  для любой непрерывной на  $S_R$  функции  $\varphi$ .

**Пример 2.2.** Построить функцию Грина для области  $\Omega = \{x_3 > 0, x \in R^3\}$  и найти решение задачи Дирихле  $\Delta u = f, u|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$  для произвольных данных  $f \in C(\bar{\Omega})$  и  $\varphi(x) \in C(\partial\Omega)$ .

*Решение.* Точке  $y(y_1, y_2, y_3)$  ( $y_3 > 0$ ) ставим в соответствие симметричную относительно плоскости  $x_3 = 0$  точку  $\bar{y}(y_1, y_2, -y_3)$ . Тогда функция Грина для полупространства  $x_3 > 0$  определяется формулой

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{1}{4\pi|x-\bar{y}|} = \\ &= \frac{1}{4\pi\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}} - \\ &- \frac{1}{4\pi\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3+y_3)^2}}. \end{aligned}$$

Она обращается в ноль, как и положено, при  $x$ , принадлежащих плоскости  $x_3 = 0$ . Вводя обозначение  $y_{mnk} = ((-1)^m y_1, (-1)^n y_2, (-1)^k y_3)$ , ее можно кратко записать в следующем виде:

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^1 \frac{(-1)^k}{|x - y_{00k}|}.$$

Найдем нормальную производную, учитывая что она направлена противоположно оси  $Ox_3$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \right|_{y_3=0} &= - \left. \frac{\partial G(x, y)}{\partial y_3} \right|_{y_3=0} = - \frac{x_3}{2\pi \left( (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2 \right)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= - \frac{x_3}{2\pi} \left. \frac{1}{|x - y|^3} \right|_{y_3=0}. \end{aligned}$$

Теперь можно воспользоваться формулой (2.1) для решения задачи Дирихле в полупространстве  $x_3 > 0$  для любых непрерывных на плоскости  $x_3 = 0$  функций  $\varphi$  и  $f$ :

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} G(x, y) f(y) dy_1 dy_2 dy_3 + \\ &+ \frac{x_3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{\left( (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2 \right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

## 2.2. Метод конформных отображений

**Определение 2.7.** Функцией Грина задачи Дирихле для области  $\Omega \subset R^2$  является функция  $G(z, \zeta)$ , где  $z \in \bar{\Omega}$ ,  $\zeta \in \Omega$ , такая, что

1.  $G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|z - \zeta|} + g(z, \zeta)$ , где функция  $g$  – гармоническая в  $\Omega$  и непрерывная в  $\bar{\Omega}$ .

2.  $G(z, \zeta)|_{\partial\Omega} = 0$  при каждом  $\zeta \in \Omega$ .

Если  $\Omega$  – неограниченная область, то функция Грина должна быть регулярной на бесконечности, то есть

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{u(z)}{\ln |z|} = 0.$$

Решение задачи Дирихле

$$\begin{aligned} \Delta u &= -f(z), \quad z \in \Omega \subset R^2, \\ u|_{\partial\Omega} &= \varphi(z), \end{aligned}$$

если оно существует, также определяется формулой (2.1).

Функцию Грина можно построить при помощи конформного отображения. Напомним, что отображение называется конформным в точке  $z_0$ , если при этом отображении сохраняются углы между любыми двумя кривыми, проходящими через точку  $z_0$ , а растяжение в точке  $z_0$  не зависит от направления. Необходимым признаком конформности отображения в точке  $z_0$  является отличие от нуля производной в этой точке.

Пусть известно отображение  $w(z)$ , переводящее область  $\Omega$  в единичный круг. Известно, что дробно-линейное преобразование  $\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$  переводит единичный круг с центром в точке  $z = a$  в единичный круг с центром в начале координат. Поэтому, если область  $\Omega$  односвязная, с достаточно гладкой границей, то функция

$$w(z, \zeta) = \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - \overline{w(\zeta)} w(z)}$$

конформно отображает область  $\Omega$  на единичный круг  $|w| < 1$  так, что точка  $z = \zeta$  переходит в начало координат. В этом случае функцию Грина можно найти по формуле

$$G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|w(z, \zeta)|}. \quad (2.2)$$

## Примеры конформных отображений

1. Линейная функция (движение плоскости)  $w = az + b$ ,  $a \neq 0$ . Область конформности: вся комплексная плоскость  $\mathbb{C}$ .

2. Степенная функция  $w = z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Область конформности: любая область, не содержащая точки  $z = 0$  и не содержащая двух точек, аргументы которых отличаются на  $2\pi/n$  (условие однолиственности). Классический пример: угол раствора  $D = \{z : 0 < \arg z < \frac{\pi}{n}\}$  отображается на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } w > 0$ .

3. Дробно-линейное преобразование  $w = \frac{a+bz}{c+dz} = \lambda \frac{\alpha+z}{\beta+z}$ . Область конформности: расширенная комплексная плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$  с удаленной точкой  $z = -d/c$  (полнос). Однозначно определяется по трем точкам и переводит окружности и прямые на плоскости  $z$  в окружности и прямые на плоскости  $w$ . Точки, симметричные окружности на плоскости  $z$ , отображаются в точки, симметричные окружности на плоскости  $w$ . Примеры:

- преобразование инверсии:  $w = 1/z$  конформно в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ;
- преобразование  $w = \frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}$  переводит единичный круг с центром в точке  $z = \zeta$  в единичный круг с центром в начале координат;
- преобразование  $w(z, \zeta) = \frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}$ , где  $\zeta$  – произвольная точка верхней полуплоскости, конформно отображает верхнюю полуплоскость  $\{\text{Im } z > 0\}$  на единичный круг  $\{|w| < 1\}$ , причем точка  $\zeta$  переходит в центр круга  $w = 0$ ;
- преобразование  $w = i \frac{z-1}{z+1}$  отображает единичный круг в верхнюю полуплоскость.

4. Функция экспонента  $w = e^z$ . Область конформности: любая горизонтальная полоса шириной  $2\pi$ . Конформно отображает полосу  $y_0 < \text{Im } z < y_0 + \pi$  в верхнюю полуплоскость.

5. Функция логарифм  $w = \text{Ln } z = \ln |z| + i \arg z$ ,  $-\pi < \arg z < \pi$ . Область конформности: плоскость с разрезом вдоль отрицательной действительной оси:  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ . Является обратным отображением к экспоненте; переводит плоскость с разрезом в горизонтальную полосу.

6. Функция Жуковского  $w = f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  переводит внутренность единичного круга в его внешнюю часть и наоборот. Верхний полукруг переходит в нижнюю полуплоскость, нижний – в верхнюю, разрез по отрезку  $[-1, 1]$  вещественной оси.

**Пример 2.3.** Построить с помощью конформного отображения функцию Грина для полуплоскости  $\text{Im } z = y > 0$  в  $R^2$ .

*Решение.* Из теории функций комплексного переменного известно, что дробно-линейное отображение

$$w(z, \zeta) = \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}},$$

где  $\zeta$  – произвольная точка верхней полуплоскости  $\{\text{Im } \zeta > 0\}$ , конформно отображает верхнюю полуплоскость  $\{\text{Im } z > 0\}$  на единичный круг  $\{|w| < 1\}$ , причем точка  $\zeta$  переходит в центр круга  $w = 0$ . Тогда, согласно формуле (2.2), функция Грина равна

$$G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z - \bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|.$$

**Пример 2.4.** Построить функцию Грина для полосы  $0 < \text{Im } z < \pi$  в  $R^2$ .

*Решение.* Сначала при помощи показательной функции  $e^z$  отобразим полосу  $0 < \text{Im } z < \pi$  в верхнюю полуплоскость, а затем воспользуемся предыдущим дробно-линейным отображением. В результате получим  $w(z, \zeta) = \frac{e^z - e^\zeta}{e^z - e^{\bar{\zeta}}}$ . Формула (2.2) теперь дает

$$G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{e^z - e^{\bar{\zeta}}}{e^z - e^\zeta} \right|.$$

**Задание 2.1.** Построить функцию Грина и найти решение задачи Дирихле для следующих областей в  $R^3$ :

1. двугранный угол  $x_2 > 0, x_3 > 0$ ;
2. полушар  $r < R, x_3 > 0$ ;
3. двугранный угол  $x_1 < 0, x_3 < 0$ ;
4. полушар  $r < R, x_2 > 0$ ;
5. двугранный угол  $x_2 < 0, x_3 > 0$ ;
6. полушар  $r < R, x_1 > 0$ ;
7. двугранный угол  $x_1 > 0, x_2 > 0$ .
8. восьмая часть шара  $r < R, x > 0, y > 0, z > 0$ .

**Задание 2.2.** Построить функцию Грина задачи Дирихле для следующих областей в  $R^2$ :

1. четверть плоскости  $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ ;
2. полукруг  $|z| < R, \operatorname{Im} z > 0$ ;
3. четверть круга  $|z| < R, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ ;
4. полоса  $\pi < \operatorname{Im} z < 2\pi$ ;
5. полуполоса  $0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z > 0$ ;
6. полукруг  $|z| < R, \operatorname{Im} z < 0$ ;
7. четверть плоскости  $\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$ .

**Задание 2.3.** Найти решение задачи Дирихле для полупространства

$$\Delta u = 0, \quad z > 0; \quad u|_{z=0} = \theta(y - x),$$

где  $\theta(x)$  – функция Хевисайда:  $\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$

**Задание 2.4.** Найти решение задачи Дирихле для двугранного угла

$$\Delta u = 0, \quad y > 0, \quad z > 0; \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{z=0} = \theta(y - |x|).$$

**Задание 2.5.** Найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в верхней полуплоскости  $y > 0$  со следующими краевыми условиями:

1.  $u|_{y=0} = \theta(x - 1)$ ;
2.  $u|_{y=0} = \frac{1}{1 + x^2}$ ;
3.  $u|_{y=0} = \frac{x}{1 + x^2}$ ;
4.  $u|_{y=0} = \cos x$ ;
5.  $u|_{y=0} = \theta(x + 2)$ ;
6.  $u|_{y=0} = \begin{cases} 1, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$

**Задание 2.6.** Найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в первом квадранте  $x > 0, y > 0$  со следующими краевыми условиями:

1.  $u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=0} = 1$ ;
2.  $u|_{x=0} = 1, \quad u|_{y=0} = -1$ ;
3.  $u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=0} = \theta(x - 1)$ ;
4.  $u|_{x=0} = \theta(y - 2), \quad u|_{y=0} = 0$ ;
5.  $u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=0} = \frac{1}{1 + x^2}$ .

**Задание 2.7.** Найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полосе  $0 < y < \pi$  со следующими краевыми условиями:

1.  $u|_{y=0} = \theta(x), u|_{y=\pi} = 0;$
2.  $u|_{y=0} = \theta(x), u|_{y=\pi} = \theta(x);$
3.  $u|_{y=0} = \theta(x), u|_{y=\pi} = -\theta(x);$
4.  $u|_{y=0} = \theta(-x), u|_{y=\pi} = \theta(x);$
5.  $u|_{y=0} = \theta(x), u|_{y=\pi} = \theta(-x).$

### 2.3. Метод потенциалов

Физический смысл объемного потенциала  $V_n(x)$  состоит в том, что он представляет собой ньютоновский (гравитационный) или кулоновский (электростатический) потенциал, создаваемый распределенной массой или зарядом с плотностью  $\rho(x)$  в объеме  $\Omega \subset R^n$ .

$$V_n(x) = \int_{\Omega} U(x, y)\rho(y)dy, \quad (2.3)$$

где функция

$$U(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{|S_1|(n-2)} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}, & n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}, & n = 2 \end{cases}$$

есть фундаментальное решение уравнения Лапласа. При  $n = 2$  потенциал  $V_2(x)$  часто называют логарифмическим потенциалом. Объемный потенциал  $V_n(x)$  обладает следующими свойствами:

1.  $V_n(x)$  – гармоническая функция вне замкнутой области  $\bar{\Omega}$ .
2. Если плотность  $\rho(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ , то  $V_n(x) \in C^2(\Omega)$ , причем

$$\Delta V_n(x) = -(n-2)|S_1|\rho(x) \text{ при } n \geq 3; \quad \Delta V_2(x) = -2\pi\rho(x). \quad (2.4)$$

Пусть  $\partial\Omega$  – гладкая или кусочно гладкая поверхность в пространстве  $R^n$ , а  $\rho$  – заданная на ней непрерывная функция. Выражения

$$V_n^{(1)}(x) = \frac{1}{|S_1|} \int_{\partial\Omega} \rho(y)U(x, y)dS_y, \quad (2.5)$$

$$V_n^{(2)}(x) = \frac{1}{|S_1|} \int_{\partial\Omega} \rho(y) \frac{\partial U(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} dS_y \quad (2.6)$$

называются соответственно потенциалом простого слоя и потенциалом двойного слоя, распределенными на поверхности  $\partial\Omega$  с плотностью  $\rho$ .

В каждой точке  $x \in R^n$ , не лежащей на  $\partial\Omega$ , потенциалы простого и двойного слоев представляют собой гармонические функции. Выражения (2.5)–(2.6) определены при  $x \in \partial\Omega$  и представляют собой непрерывные функции.

Пусть  $\partial\Omega$  – замкнутая поверхность, имеющая конечную кривизну (в более общем случае – поверхность Ляпунова), а  $D^+$  и  $D^-$  – соответственно конечная и бесконечная области, ограниченные ею.

Потенциал простого слоя (2.5) обладает следующими свойствами.

1.  $V_n^{(1)}(x)$  остается непрерывным при переходе точки  $x$  из области  $D^+$  в область  $D^-$ .

2. Существуют пределы

$$\left(\frac{\partial V_n^{(1)}(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)^+ = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D^+}} \frac{\partial V_n^{(1)}(x)}{\partial \mathbf{n}_x}, \quad \left(\frac{\partial V_n^{(1)}(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)^- = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D^-}} \frac{\partial V_n^{(1)}(x)}{\partial \mathbf{n}_x}.$$

3. Обозначим через  $\frac{\partial V_n^{(1)}(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}$  нормальную производную потенциала простого слоя при  $x = x_0 \in \partial\Omega$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V_n^{(1)}(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)^+ &= \frac{\nu(x_0)}{2} + \frac{\partial V_n^{(1)}(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}, \\ \left(\frac{\partial V_n^{(1)}(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)^- &= -\frac{\nu(x_0)}{2} + \frac{\partial V_n^{(1)}(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}. \end{aligned}$$

Что касается потенциала двойного слоя, то он обладает следующими свойствами.

1. Для любой точки  $x_0 \in \partial\Omega$  существуют пределы

$$V_n^{(2)}(x_0)^+ = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D^+}} V_n^{(2)}(x), \quad V_n^{(2)}(x_0)^- = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D^-}} V_n^{(2)}(x).$$

2. При переходе точки  $x$  из области  $D^+$  в область  $D^-$  он претерпевает разрыв, причем

$$V_n^{(2)}(x_0)^+ = -\frac{\nu(x_0)}{2} + V_n^{(2)}(x_0), \quad V_n^{(2)}(x_0)^- = \frac{\nu(x_0)}{2} + V_n^{(2)}(x_0), \quad \text{где}$$

$$V_n^{(2)}(x_0) = \frac{1}{\sigma_n} \int_S \nu(y) \frac{\partial E(x_0, y)}{\partial \mathbf{n}_y} dS_y.$$

3. При  $x \rightarrow x_0 \in \partial\Omega$  существуют пределы

$$\left(\frac{\partial V_n^{(2)}(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)^+ = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D^+}} \frac{\partial V_n^{(2)}(x)}{\partial \mathbf{n}_x}, \quad \left(\frac{\partial V_n^{(2)}(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)^- = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D^-}} \frac{\partial V_n^{(2)}(x)}{\partial \mathbf{n}_x},$$

$$\left(\frac{\partial V_n^{(2)}(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)^+ = \left(\frac{\partial V_n^{(2)}(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)^-.$$

**Пример 2.5.** Вычислить объемный потенциал  $V_3$  для шара  $|x| < R$  с плотностью  $\rho = \rho(|x|) \in C$ . Проверить выполнение свойств 1 и 2 для объемного потенциала. Рассмотреть частный случай  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ .

*Решение.* Объемный потенциал в точке  $x$  равен

$$V_3(x) = \int_{|y| < R} \frac{\rho(|y|)}{|x - y|} dy. \quad (2.7)$$

В силу сферической симметрии плотности  $\rho$  решение должно зависеть только от расстояния  $r$  до центра шара (рис. 2.2).

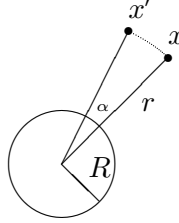


Рис. 2.2

Действительно, повернем шар на угол  $\alpha$ . Точка  $x$  – конкретная точка шара, следовательно, она также повернется на угол  $\alpha$  и займет положение  $x'$ . В ней решение будет равно  $V_3(x') = V_3(x)$ . Но, с другой стороны, в силу симметрии поворот шара ничего не изменил. Следовательно, на всей сфере радиуса  $r$  решение есть  $V_3(x)$ .

Введем сферические координаты с началом координат в центре шара. Точку  $x$  выберем на оси  $Ox_3$ :  $r \geq R$  (рис. 2.3);  $r \leq R$  (рис. 2.4). Угол между векторами  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$ , проведенными из начала координат в точки  $x$  и  $y$ , равен углу  $\theta$  в сферической системе координат. Обозначим  $|\vec{x}| = r$ ,  $|\vec{y}| = r_1$ ,  $|\vec{x} - \vec{y}| = d$ .

Переходя к сферическим координатам в интеграле (2.7) и учитывая, что по теореме косинусов

$$d = |\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \theta},$$

получим

$$\begin{aligned} V_3(r) &= \int_0^R \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \frac{\rho(r_1)r_1^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr_1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \theta}} = 2\pi \int_0^R \int_0^\pi \frac{\rho(r_1)r_1^2 \sin \theta d\theta dr_1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \theta}} = \\ &= 2\pi \int_0^R \rho(r_1)r_1^2 I(r, r_1) dr_1, \end{aligned}$$

где

$$I(r, r_1) = - \int_0^\pi \frac{d \cos \theta}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \theta}} = \frac{(r + r_1) - |r - r_1|}{rr_1}.$$

Следовательно, если  $r \geq r_1$ , то  $I(r, r_1) = I(r) = 2/r$ , а если  $r \leq r_1$ , то  $I(r, r_1) = I(r_1) = 2/r_1$ .

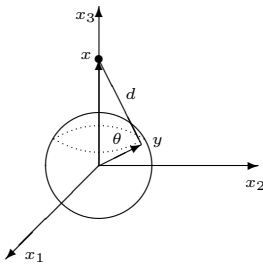


Рис. 2.3

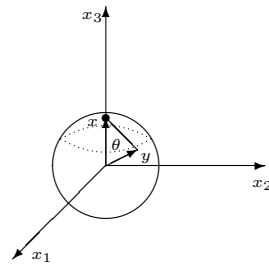


Рис. 2.4

1. Пусть  $r \geq R$ . Тогда при всех  $r_1$   $I(r, r_1) = 2/r$  и

$$V_3(r) = \frac{4\pi}{r} \int_0^R \rho(r_1)r_1^2 dr_1. \quad (2.8)$$

2. Пусть  $r < R$ . Тогда для вычисления интеграла разобьем его на два:

$$V_3(r) = 2\pi \int_0^r \rho(r_1)r_1^2 I(r) dr_1 + 2\pi \int_r^R \rho(r_1)r_1^2 I(r_1) dr_1.$$

В результате получим

$$V_3(r) = \frac{4\pi}{r} \int_0^r \rho(r_1)r_1^2 dr_1 + 4\pi \int_r^R \rho(r_1)r_1 dr_1. \quad (2.9)$$

Проверим теперь выполнение свойств 1 и 2 для объемного потенциала. Заметим, что в силу сферической симметрии частные производные от потенциала по угловым переменным в сферической системе координат равны нулю, поэтому при вычислении лапласиана следует учитывать лишь его радиальную часть, равную  $(V_3)_{rr} + \frac{2}{r}(V_3)_r$ . Выполнив вычисления, получим

$$\Delta V_3 = (V_3)_{rr} + \frac{2}{r}(V_3)_r = 0, \quad r > R, \quad \Delta V_3 = -4\pi\rho(r), \quad r < R,$$

что означает выполнение указанных свойств.

Для частного случая  $\rho = \rho_0 = \text{const}$  объемный потенциал равен

$$V_3(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 \frac{1}{r}, & r \geq R, \\ 2\pi\rho_0 \left( R^2 - \frac{1}{3}r^2 \right), & r < R. \end{cases}$$

**Пример 2.6.** Найти логарифмический потенциал для круга  $r < R$  с плотностью  $\rho = \rho(r) \in C([0, R])$ . Проверить для него выполнение свойств 1 и 2. Рассмотреть частный случай  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ .

*Решение.* Здесь, как и в примере 2.5, в силу симметрии потенциал

$$V_2(x) = \int_{|y| < R} \rho(y) \ln \frac{1}{|x - y|} dy$$

будет зависеть только от расстояния до центра круга, который и выберем за начало полярной системы координат.

Пусть в декартовой системе координат вектора  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  имеют соответственно координаты  $(x_1, x_2)$  и  $(y_1, y_2)$  (рис. 2.5), а в полярной – соответственно  $(r, \varphi)$  и  $(r_1, \varphi_1)$  (рис. 2.6).

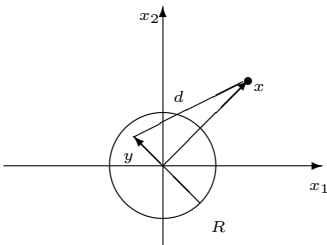


Рис. 2.5

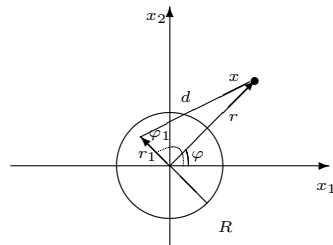


Рис. 2.6

Расстояние  $d = |\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\varphi_1 - \varphi)}$  (рис. 2.6). Тогда выражение для потенциала с учетом того, что он не зависит от угла  $\varphi$ ,

будет равно

$$V_2(r) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho(r_1) \ln \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \varphi_1}} \right] r_1 d\varphi_1 dr_1 = \int_0^R \rho(r_1) I(r, r_1) r_1 dr_1,$$

где

$$I(r, r_1) = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \ln(r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \varphi_1) d\varphi_1.$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть  $r \geq r_1$ . Тогда последний интеграл можно представить в виде:

$$I(r, r_1) = 2\pi \ln \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \ln(1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi_1) d\varphi_1, \quad \lambda = \frac{r_1}{r} \leq 1.$$

Вычислим этот интеграл при помощи интегрирования по параметру. Так как

$$\frac{d}{d\lambda} [\ln(1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi_1)] = \frac{2\lambda - 2 \cos \varphi_1}{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi_1}$$

и  $\ln(1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi_1)|_{\lambda=0} = 0$ , то

$$\int_0^{2\pi} \ln[1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi_1] d\varphi_1 = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^\lambda \frac{2\mu - 2 \cos \varphi_1}{1 + \mu^2 - 2\mu \cos \varphi_1} d\mu \right] d\varphi_1. \quad (2.10)$$

Меняя порядок интегрирования и используя вычисленное в примере 1.1 значение интеграла

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\varphi}{1 + \mu^2 - 2\mu \cos \varphi} d\varphi = \frac{2\pi\mu^n}{1 - \mu^2},$$

получим, что интеграл по  $\varphi_1$  равен нулю. Следовательно, при  $r \geq r_1$

$$I(r, r_1) = -2\pi \ln r.$$

2. Пусть теперь  $r < r_1$ . Тогда искомый интеграл можно представить в виде

$$I(r, r_1) = 2\pi \ln \frac{1}{r_1} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \ln(1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi_1) d\varphi_1, \quad \lambda = \frac{r}{r_1} \leq 1.$$

Интеграл по  $\varphi_1$  даст снова ноль. В результате получим  $I(r, r_1) = -2\pi \ln r_1$ . Поступая далее, как в примере 2.5, найдем логарифмический потенциал

$$V_2(r) = \begin{cases} -2\pi \ln r \int_0^R \rho(r_1) r_1 dr_1, & r \geq R, \\ -2\pi \ln r \int_0^r \rho(r_1) r_1 dr_1 - 2\pi \int_r^R \rho(r_1) r_1 \ln r_1 dr_1, & r < R. \end{cases}$$

Для проверки свойств 1 и 2 логарифмического потенциала отметим, что при вычислении лапласиана следует снова брать лишь его радиальную часть, равную в этом случае  $(V_2)_{rr} + \frac{1}{r}(V_2)_r$ .

Для частного случая  $\rho = \rho_0 = \text{const}$  получим

$$V_2(r) = \begin{cases} -\pi \rho_0 R^2 \ln r, & r \geq R, \\ -\pi \rho_0 \left( R^2 \ln R - \frac{R^2 - r^2}{2} \right), & r < R. \end{cases}$$

**Задание 2.8.** Вычислить объемный потенциал  $V_3$  для шара  $|x| < R$  со следующими плотностями:

1.  $\rho = |x|$ ;    2.  $\rho = |x|^2$ ;    3.  $\rho = \sqrt{|x|}$ ;    4.  $\rho = e^{-|x|}$ ;    5.  $\rho = \sin |x|$ ;
6.  $\rho = \cos |x|$ ;    7.  $\rho = 1/(1 + |x|^2)$ ;    8.  $\rho = \ln(1 + |x|/R)$ .

**Задание 2.9.** Найти логарифмический потенциал для круга  $r < R$  со следующими плотностями:

1.  $\rho = r$ ;    2.  $\rho = r^2$ ;    3.  $\rho = e^{-r}$ ;    4.  $\rho = 1/(1 + r^2)$ ;    5.  $\rho = \sqrt{r}$ ;
6.  $\rho = \sin r$ ;    7.  $\rho = \cos r$ ;    8.  $\rho = \sin \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ;    9.  $\rho = \cos \varphi$ .

**Задание 2.10.** Найти потенциал простого слоя, распределенного с постоянной плотностью  $\mu_0$  на сфере  $|x| = R$ .

**Задание 2.11.** На круглом диске радиуса  $R$  распределен простой слой с плотностью  $\mu$ . Найти потенциал в точке, лежащей на оси диска, для следующих плотностей:

1.  $\mu = \mu_0 = \text{const}$ ;    2.  $\mu = r$ ;    3.  $\mu = r^2$ ;    4.  $\mu = a + br$ ;
5.  $\mu = \mu(\varphi)$  – непрерывная  $2\pi$ -периодическая функция.

**Задание 2.12.** Найти потенциал двойного слоя, распределенного с постоянной плотностью  $\mu_0$  на сфере  $|x| = R$ .

**Задание 2.13.** Найти логарифмический потенциал простого слоя для окружности радиуса  $R$  с плотностью  $\mu_0$ .

**Задание 2.14.** Найти логарифмический потенциал двойного слоя для окружности радиуса  $R$  с плотностью  $\mu_0$ .

**Задание 2.15.** Составить интегральные уравнения Фредгольма второго рода, к которым сводятся внутренние и внешние задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа.

**Задание 2.16.** С помощью потенциала двойного слоя решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри и вне круга.

**Задание 2.17.** С помощью потенциала простого слоя решить задачу Неймана для уравнения Лапласа внутри и вне круга.

**Задание 2.18.** С помощью потенциала двойного слоя решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри и вне шара.

**Задание 2.19.** С помощью поверхностных потенциалов решить задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа для полупространства  $z > 0$ .

# Ответы и указания

## 1.1.

- $u(r, \varphi) = \frac{1}{2} (1 + r^2 \cos 2\varphi)$ ;
- $u(r, \varphi) = \frac{1}{2} (1 - r^2 \cos 2\varphi)$ ;
- $u(r, \varphi) = \frac{1}{4} (3r \sin \varphi - r^3 \sin 3\varphi)$ ;
- $u(r, \varphi) = 2 + r^3 \sin 3\varphi$ ;
- $u(r, \varphi) = 1 + r^4 \cos 4\varphi$ ;
- $u(r, \varphi) = \frac{1}{8} (5 + 3r^4 \cos 4\varphi)$ ;
- Задача неразрешима;
- Задача неразрешима;
- Задача неразрешима;
- $u(r, \varphi) = C + \frac{r^3}{3} \sin 3\varphi$ ;
- $u(r, \varphi) = C + \frac{r^2}{2} \cos 2\varphi + \frac{2r^3}{3} \sin 3\varphi$ ;
- $u(r, \varphi) = C + \frac{r^4}{8} \cos 4\varphi - \frac{r^2}{4} \cos 2\varphi$ ;
- $u(r, \varphi) = 2 + r^3 \sin 3\varphi$ .

## 1.2.

- $u(r, \varphi) = \frac{5}{8} + \frac{3R^4}{8r^4} \cos 4\varphi$ ;
- $u(r, \varphi) = \frac{3}{8} + \frac{R^2}{2r^2} \cos 2\varphi + \frac{R^4}{8r^4} \cos 4\varphi$ ;
- $u(r, \varphi) = \frac{3R}{4r} \cos \varphi + \frac{R^3}{4r^3} \cos 3\varphi$ ;
- $u(r, \varphi) = \frac{1}{2} + \frac{R^2}{2r^2} \cos 2\varphi$ ;
- $u(r, \varphi) = \frac{R}{r} \sin \varphi$ ;
- Задача неразрешима;
- $u(r, \varphi) = C - \frac{3R^2}{4r} \sin \varphi + \frac{R^4}{12r^3} \sin 3\varphi$ ;
- $u(r, \varphi) = C - \frac{R^3}{2r^2} \cos 2\varphi$ ;
- $u(r, \varphi) = C - \frac{R^4}{3r^3} \cos 3\varphi$ ;
- $u(r, \varphi) = C - \frac{R^4}{3r^3} \sin 3\varphi$ ;
- $u(r, \varphi) = C - \frac{3R^2}{4r} \cos \varphi - \frac{R^4}{12r^3} \cos 3\varphi$ ;
- $u(r, \varphi) = C + \frac{R^3}{4r^2} \cos 2\varphi + \frac{R^5}{8r^4} \cos 4\varphi$ ;
- $u(r, \varphi) = C + \frac{R^7}{12r^6} \cos 6\varphi$ ;
- $u(r, \varphi) = \frac{3}{4} + \frac{R^4}{4r^4} \cos 4\varphi$ .

## 1.3.

- $u(r, \varphi) = 2 \ln r + \left( \frac{r}{5} - \frac{4}{5r} \right) \sin \varphi$ ;
- $u(r, \varphi) = 1 + \frac{4}{5} \left( r - \frac{1}{r} \right) \cos \varphi$ ;
- $u(r, \varphi) = \frac{1}{2} + \left( \frac{4r}{5} - \frac{4}{5r} \right) \cos \varphi - \left( \frac{r^2}{34} + \frac{8}{17r^2} \right) \cos 2\varphi$ ;
- $u(r, \varphi) = \frac{1}{2} + \left( \frac{4r}{5} - \frac{4}{5r} \right) \sin \varphi + \left( \frac{r^2}{34} + \frac{18}{17r^2} \right) \cos 2\varphi$ ;
- $u(r, \varphi) = \ln r + \left( \frac{r^2}{17} + \frac{16}{17r^2} \right) \cos 2\varphi + \left( \frac{4}{257r^4} - \frac{4r^4}{257} \right) \cos 4\varphi$ ;

$$6. u(r, \varphi) = \left( \frac{19r}{20} - \frac{1}{5r} \right) \sin \varphi - \left( \frac{r^3}{260} + \frac{16}{65r^3} \right) \sin 3\varphi;$$

$$7. u(r, \varphi) = \frac{1}{2} + \left( \frac{4r}{5} - \frac{4}{5r} \right) \cos \varphi - \left( \frac{r^2}{34} - \frac{18}{17r^2} \right) \cos 2\varphi;$$

$$8. u(r, \varphi) = 1 + 2 \ln r + \left( \frac{r^2}{17} + \frac{16}{17r^2} \right) \cos 2\varphi + \left( \frac{4r^2}{17} - \frac{4}{17r^2} \right) \sin 2\varphi.$$

1.4.

$$u(r, \varphi) = -\frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^{2n+1} \frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1} = \frac{2T_0}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{R^2 - r^2}{2rR \sin \varphi} \right) - T_0.$$

1.5.

$$1. u(r, \varphi) = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{(2k+1)\pi}{\alpha}} \sin \frac{(2k+1)\pi\varphi}{\alpha};$$

$$2. u(r, \varphi) = \frac{2A\alpha}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{\pi k}{\alpha}} \sin \frac{\pi k \varphi}{\alpha};$$

$$3. u(r, \varphi) = \frac{A\alpha}{2} - \frac{4A\alpha}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{(2k+1)\pi}{\alpha}} \cos \frac{(2k+1)\pi\varphi}{\alpha};$$

$$4. u(r, \varphi) = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}} \cos \frac{(2k+1)\pi\varphi}{2\alpha};$$

$$5. u(r, \varphi) = \frac{8A\alpha}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}} \sin \frac{(2k+1)\pi\varphi}{2\alpha};$$

$$6. u(r, \varphi) = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}} \sin \frac{(2k+1)\pi\varphi}{2\alpha};$$

$$7. u(r, \varphi) = \frac{4A\alpha}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^k \pi}{2k+1} - \frac{2}{(2k+1)^2} \right) \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}} \cos \frac{(2k+1)\pi\varphi}{2\alpha};$$

$$8. u(r, \varphi) = A.$$

1.6.

$$u(x, y) = \frac{4v_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi x}{2b}}{(2k+1) \operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi a}{2b}} \cos \frac{(2k+1)\pi y}{2b}.$$

1.7.

1.  $\Delta u = 0$ ,  $u|_{x=0} = \varphi_0$ ,  $u_x|_{x=a} = 0$ ,  $u|_{y=0} = 0$ ,  $u_y|_{y=b} = \sigma_0$ ;

$$u = \frac{4\varphi_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(2k+1)(a-x)}{2b} \sin \frac{(2k+1)\pi y}{2b}}{(2k+1) \operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi a}{2b}} + \frac{8\sigma_0 a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi y}{2a} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2a}}{(2k+1)^2 \operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi b}{2a}};$$

2.  $\Delta u = 0$ ,  $u|_{x=0} = 0$ ,  $u_x|_{x=a} = \sigma_0$ ,  $u|_{y=0} = \varphi_0$ ,  $u_y|_{y=b} = 0$ ;

$$u = \frac{8\sigma_0 b}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi x}{2b} \sin \frac{(2k+1)\pi y}{2b}}{(2k+1)^2 \operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi a}{2b}} + \frac{4\varphi_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(2k+1)(b-y)}{2a} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2a}}{(2k+1) \operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi b}{2a}};$$

3.  $\Delta u = 0$ ,  $u|_{x=0} = 0$ ,  $u_x|_{x=a} = \sigma_0$ ,  $u|_{y=0} = 0$ ,  $u|_{y=b} = \varphi_0$ ;

$$u(x, y) = \frac{4\varphi_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi(2k+1)x}{2a} \operatorname{sh} \frac{\pi(2k+1)y}{2a}}{(2k+1) \operatorname{sh} \frac{\pi(2k+1)b}{2a}} + \frac{4\sigma_0 b}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi(2k+1)y}{b} \operatorname{sh} \frac{\pi(2k+1)x}{b}}{(2k+1)^2 \operatorname{ch} \frac{\pi(2k+1)a}{b}};$$

4.  $\Delta u = 0$ ,  $u_x|_{x=0} = \sigma_0$ ,  $u_x|_{x=a} = 0$ ,  $u|_{y=0} = 0$ ,  $u_y|_{y=b} = \sigma_0$ ;

$$u(x, y) = \sigma_0 y - \frac{8\sigma_0 b}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(2k+1)(a-x)}{2b} \sin \frac{(2k+1)\pi y}{2b}}{(2k+1)^2 \operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi a}{2b}};$$

5.  $\Delta u = 0$ ,  $u|_{x=0} = 0$ ,  $u|_{x=a} = \varphi_0$ ,  $u|_{y=0} = 0$ ,  $u_y|_{y=b} = \sigma_0$ ;

$$u(x, y) = \frac{4\sigma_0 a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi y}{a} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{a}}{(2k+1)^2 \operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi b}{a}} + \frac{4\varphi_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2k+1)x}{2b} \sin \frac{(2k+1)\pi y}{2b}}{(2k+1) \operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi a}{2b}};$$

6.  $\Delta u = 0$ ,  $u|_{x=0} = \varphi_0$ ,  $u|_{x=a} = 0$ ,  $u_y|_{y=0} = \sigma_0$ ,  $u_y|_{y=b} = 0$ ;

$$u(x, y) = \frac{4a\sigma_0}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2k+1)y}{a} \sin \frac{\pi(2k+1)x}{a}}{(2k+1)^2 \operatorname{ch} \frac{\pi(2k+1)b}{a}} + \frac{4\varphi_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2k+1)x}{2b} \sin \frac{(2k+1)y}{2b}}{\pi(2k+1) \operatorname{sh} \frac{\pi(2k+1)a}{2b}};$$

7.  $\Delta u = 0$ ,  $u_x|_{x=0} = \sigma_0$ ,  $u_x|_{x=a} = 0$ ,  $u|_{y=0} = \varphi_0$ ,  $u|_{y=b} = 0$ ;

$$u = \frac{4\varphi_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2k+1)(b-y)}{a} \sin \frac{\pi(2k+1)x}{a}}{(2k+1) \operatorname{sh} \frac{\pi(2k+1)b}{a}} - \frac{4\sigma_0 b}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2k+1)(a-x)}{b} \sin \frac{\pi(2k+1)y}{b}}{(2k+1)^2 \operatorname{ch} \frac{\pi(2k+1)a}{b}};$$

8.  $\Delta u = 0$ ,  $u_x|_{x=0} = \varphi_0$ ,  $u|_{x=a} = 0$ ,  $u|_{y=0} = 0$ ,  $u|_{y=b} = \varphi_0$ ;

$$u(x, y) = \frac{4\varphi_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \operatorname{sh} \frac{\pi(2m+1)y}{2a} \cos \frac{\pi(2m+1)x}{2a}}{(2m+1) \operatorname{sh} \frac{\pi(2m+1)b}{2a}} - \\ - \frac{4\varphi_0 b}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2k-1)(a-x)}{b} \sin \frac{\pi(2k-1)y}{b}}{(2k-1)^2 \operatorname{ch} \frac{\pi(2k-1)a}{b}}$$

1.8.

$$u(r, \varphi) = \frac{16qa^2}{k\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi(b-y)}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi b}{2a}} \right) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2a} = \\ = -\frac{q}{2k} x^2 + \frac{aq}{k} x + \frac{16qa^2}{k\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \frac{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi(b-y)}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi b}{2a}} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2a},$$

$k$  – коэффициент внутренней теплопроводности.

Указание: задача сводится к решению уравнения  $\Delta u = -\frac{q}{k}$  при условиях

$$u|_{x=0} = u|_{y=0} = 0, \quad u_x|_{x=a} = u_y|_{y=b} = 0.$$

1.9.

1.  $\frac{\pi}{2} + y - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(2k+1)(\pi-y)}{(2k+1)^2 \operatorname{ch}(2k+1)\pi} \cos(2k+1)x - \frac{\operatorname{sh} 2y}{2 \operatorname{ch} 2\pi} \cos 2x$ ;
2.  $\frac{16}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3 \operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi}{2}} \operatorname{sh} \frac{(2k+1)y}{2} \cos \frac{(2k+1)x}{2} - 2 \operatorname{th} \frac{3\pi}{2} \operatorname{sh} \frac{3y}{2} \sin \frac{3x}{2}$ ;
3.  $\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1} (\operatorname{cth} \pi k \operatorname{sh} ky - \operatorname{ch} ky) \cos kx + \frac{2}{\pi} + \frac{(\pi-2)y}{\pi^2} + \frac{\operatorname{sh} 2y}{\operatorname{sh} 2\pi} \cos 2x$ ;
4.  $\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{4(1-\pi)(-1)^k}{\pi(2k+1)} + \frac{2}{(2k+1)^2} \right) \left[ \operatorname{ch} \frac{(2k+1)y}{2} - \operatorname{th} \frac{(2k+1)\pi}{2} \operatorname{sh} \frac{(2k+1)y}{2} \right] \times \\ \times \cos \frac{(2k+1)x}{2} + \frac{6}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2}} \operatorname{sh} \frac{y}{2} \cos \frac{x}{2} - \frac{2}{3 \operatorname{ch} \frac{3\pi}{2}} \operatorname{sh} \frac{3y}{2} \cos \frac{3x}{2}$ ;
5.  $\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} (\operatorname{th} 2\pi k \operatorname{sh} 2ky - \operatorname{ch} 2ky) \cos 2kx + \frac{2}{\pi} + y + \frac{2}{\operatorname{ch} \pi} \operatorname{sh} y \cos x - \\ - \frac{1}{2 \operatorname{ch} 2\pi} \operatorname{sh} 2y \cos 2x$ ;

6.  $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left[ \operatorname{ch} \frac{(2k+1)y}{2} - \operatorname{th} \frac{(2k+1)\pi}{2} \operatorname{sh} \frac{(2k+1)y}{2} \right] \sin \frac{(2k+1)x}{2} + \frac{2}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} +$   
 $+ \frac{2}{\operatorname{ch} \frac{3\pi}{2}} \sin \frac{3x}{2};$
7.  $\frac{2}{\pi} + 2y - \frac{1}{2 \operatorname{ch} 2\pi} \operatorname{sh} 2y \cos 2x + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} (\operatorname{ch} ky - \operatorname{th} \pi k \operatorname{sh} ky) \cos kx;$
8.  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2 \operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi}{2}} \left( \frac{2(1+\pi)(-1)^k}{\pi} - \frac{1}{2k+1} \right) \operatorname{sh} \frac{(2k+1)x}{2} \cos \frac{(2k+1)y}{2} +$   
 $+ (\operatorname{ch} \frac{x}{2} - \operatorname{th} \frac{\pi}{2} \operatorname{sh} \frac{x}{2}) \cos \frac{y}{2} + 3 (\operatorname{ch} \frac{3x}{2} - \operatorname{th} \frac{3\pi}{2} \operatorname{sh} \frac{3x}{2}) \cos \frac{3y}{2};$
9.  $x - \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 \operatorname{ch}(4k+2)\pi} \operatorname{ch}(4k+2)x \cos(4k+2)y +$   
 $+ \left[ \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x - \left( \frac{2}{\pi \operatorname{ch} 2\pi} + \frac{\operatorname{th} 2\pi}{2} \right) \operatorname{ch} 2x \right] \cos 2y;$
10.  $(\operatorname{sh} 2x - \operatorname{cth} 2\pi \operatorname{ch} 2x) \sin 2y + (\operatorname{sh} 4x - \operatorname{cth} 4\pi \operatorname{ch} 4x) \sin 4y +$   
 $+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k^2 \operatorname{sh} 2\pi k} \operatorname{ch} 2kx \sin 2ky;$
11.  $\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{6}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 \operatorname{ch}(4k+2)\pi} \operatorname{ch}(4k+2)x \cos(4k+2)y +$   
 $+ \frac{1}{4} [\operatorname{th}(2\pi \operatorname{ch} 2x - \operatorname{sh} 2x) \cos 2y];$
12.  $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} [\operatorname{th}(4k+2)\pi \operatorname{sh}(4k+2)x - \operatorname{ch}(4k+2)x] \sin(4k+2)y +$   
 $+ \frac{1}{4 \operatorname{ch} 2\pi} \operatorname{sh} 2x \sin 2y.$
13.  $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} [\operatorname{th}(2k+1)\pi \operatorname{sh}(2k+1)x - \operatorname{ch}(2k+1)x] \cos(2k+1)y +$   
 $+ \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2 \operatorname{ch} \pi} \operatorname{sh} x \cos y;$
14.  $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} [\operatorname{sh}(2k+1)x - \operatorname{th}(2k+1)\pi \operatorname{ch}(2k+1)x] \cos(2k+1)y +$   
 $+ \frac{1}{\operatorname{ch} 3\pi} \operatorname{ch} 3x \cos 3y.$

1.10.

1.  $u(r, \theta) = \frac{8}{15} + \frac{4}{21}(3 \cos^2 \theta - 1) \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{4}{35}(35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3) \left(\frac{r}{R}\right)^4$
2.  $u(r, \theta) = -\frac{r^2}{2R}(3 \cos^2 \theta - 1);$
3.  $u(r, \theta) = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{r}{R}\right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1);$
4.  $u(r, \theta) = \frac{3r}{5R} \cos \theta + \frac{r^3}{5R^3} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta);$
5.  $u(r, \theta) = \frac{2r}{5} \cos \theta - \frac{r^3}{15R^2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta);$
6.  $u(r, \theta) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{r}{R}\right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1);$
7.  $u(r, \theta) = -\frac{9r}{5R} \cos \theta + \frac{4r^3}{5R^3} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta);$
8.  $u(r, \theta) = r \cos \theta.$

1.11.

1.  $u(r, \theta) = -\frac{2R^2}{3r} + \frac{R^4}{9r^3} (3 \cos^2 \theta - 1);$
2.  $u(r, \theta) = -\frac{2R^2}{3(R+1)r} + \frac{R^4}{3(3+R)r^3} (3 \cos^2 \theta - 1);$
3.  $u(r, \theta) = -\frac{3R^3}{10r^2} \cos \theta - \frac{R^5}{20r^4} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta);$
4.  $u(r, \theta) = -\frac{2R^2}{3(1+2R)r} + \frac{R^4}{3(3+2R)r^3} (3 \cos^2 \theta - 1);$
5.  $u(r, \theta) = -\frac{2R^2}{3(3+R)r} + \frac{R^4}{3(9+R)r^3} (3 \cos^2 \theta - 1);$
6.  $u(r, \theta) = \frac{R^2}{3r} - \frac{2R^4}{9r^3} (3 \cos^2 \theta - 1);$
7.  $u(r, \theta) = \frac{2R^2}{3(R-2)r} - \frac{R^4}{3(R-6)r^3} (3 \cos^2 \theta - 1);$
8.  $u(r, \theta) = \frac{3R^2}{5r^2} \cos \theta + \frac{R^4}{5r^4} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta).$

1.12.

1.  $u(r, \theta) = \frac{5}{3} - \frac{2}{r} + \frac{2}{93} (7r^2 + 8r^{-3}) (3 \cos^2 \theta - 1);$
2.  $u(r, \theta) = \frac{20}{3} \left(1 - \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{7} (-r + 8r^{-2}) \cos \theta + \frac{8}{93} (r^2 - r^{-3}) (3 \cos^2 \theta - 1);$
3.  $u(r, \theta) = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3r} + \frac{4}{7} (r - r^{-2}) \cos \theta + \frac{1}{93} (r^2 - 32r^{-3}) (3 \cos^2 \theta - 1);$

4.  $u(r, \theta) = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3r} + \frac{4}{7} (r - r^{-2}) \cos \theta + \frac{1}{93} (-r^2 + 32r^{-3}) (3 \cos^2 \theta - 1);$
5.  $u(r, \theta) = -\frac{4}{3} + \frac{2}{r} + \frac{1}{93} (17r^2 - 48r^{-3}) (3 \cos^2 \theta - 1);$
6.  $u(r, \theta) = -\frac{5}{3} + \frac{10}{3r} + \frac{4}{7} (r - r^{-2}) \cos \theta + \frac{1}{93} (r^2 - 32r^{-3}) (3 \cos^2 \theta - 1);$
7.  $u(r, \theta) = 2 - \frac{2}{r} + \frac{3}{35} (r - 8r^{-2}) \cos \theta + \frac{4}{635} (-r^3 + 128r^{-4}) (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta);$
8.  $u(r, \theta) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3r} + \frac{1}{7} (-r + 8r^{-2}) \cos \theta + \frac{16}{93} (r^2 - r^{-3}) (3 \cos^2 \theta - 1).$

1.13.

$$u(r, \varphi, \theta) = T_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k+2)} (4k+3) \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} P_{2k+1}(\cos \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

1.14.

1.  $u(r, \theta, \varphi) = \frac{r^3}{R^3} \sin^3 \theta \sin(3\varphi + \frac{\pi}{4});$
2.  $u(r, \theta, \varphi) = \left(\frac{r}{R} \sin \theta + \frac{r^2}{R^2} \sin 2\theta\right) \sin(\varphi + \frac{\pi}{6});$
3.  $u(r, \theta, \varphi) = \frac{2}{3} + \frac{r}{R} \sin \theta \sin \varphi - \frac{r^2}{6R^2} (3 \cos 2\theta + 1);$
4.  $u(r, \theta, \varphi) = \frac{r^3}{R^3} \cos \theta \sin^2 \theta \sin(2\varphi + \frac{\pi}{6});$
5.  $u(r, \theta, \varphi) = -2 + \frac{3r}{R} \sin \theta \cos \varphi + \frac{r^2}{2R^2} (3 \cos 2\theta + 3 \sin 2\theta \cos \varphi + 1);$
6.  $u(r, \theta, \varphi) = \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \theta \cos(2\varphi - \frac{\pi}{4}) + \frac{r}{R} \sin \theta \sin \varphi;$
7.  $u(r, \theta, \varphi) = \frac{r}{R} \cos \theta + \frac{r^2}{2R^2} \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) \sin 2\theta;$
8.  $u(r, \theta, \varphi) = \frac{r^2}{R^2} \cos(2\varphi + \frac{\pi}{7}) \sin^2 \theta.$

1.15.

1.  $u(r, \theta, \varphi) = C - \frac{R^2}{2r^2} \sin \theta \sin(\frac{\pi}{4} - \varphi);$
2.  $u(r, \theta, \varphi) = \frac{R^2}{5r^2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} (5 \cos^2 \theta - 1)\right);$
3.  $u(r, \theta, \varphi) = \frac{R^{101}}{r^{101}} \sin^{100} \theta \sin 100\varphi;$
4.  $u(r, \theta, \varphi) = \frac{R^5}{r^5} \cos(3\varphi + \frac{\pi}{4}) \sin^3 \theta \cos \theta;$
5.  $u(r, \theta, \varphi) = \frac{R}{3r} + \frac{R^2}{r^2} \sin \theta \sin \varphi - \frac{r^3}{3R^3} (3 \cos 2\theta - 1);$

6.  $u(r, \theta, \varphi) = \frac{R^2}{r^2} \sin \varphi \sin \theta + \frac{R^3}{2r^3} \sin \varphi \sin 2\theta;$

7.  $u(r, \theta, \varphi) = \frac{2R^2}{r^2} \sin \varphi \sin \theta + \frac{R^3}{r^3} (\sin \varphi \sin 2\theta + \sin 2\varphi \sin^2 \theta);$

8.  $u(r, \theta, \varphi) = \frac{R^3}{r^3} \sin^2 \theta \cos(2\varphi + \frac{\pi}{6}).$

**1.16.**

1.  $u(r, \theta, \varphi) = \frac{12}{7} (r - r^{-2}) \cos \theta + \frac{3}{31} (32r^{-3} - r^2) \sin 2\varphi \sin^2 \theta;$

2.  $u(r, \theta, \varphi) = 4 (r - r^{-2}) \cos \theta + (-r + 8r^{-2}) \cos \varphi \sin \theta;$

3.  $u(r, \theta, \varphi) = (14 - \frac{12}{r}) + r^2(1 - 3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \sin 2\varphi);$

4.  $u(r, \theta, \varphi) = \frac{6}{7} (8r^{-2} - r) \cos \varphi \sin \theta + \frac{3}{31} (32r^{-3} - r^2) \cos \varphi \sin 2\theta;$

5.  $u(r, \theta, \varphi) = (\frac{32}{r^3} - r^2) \sin \varphi \sin 2\theta + 8 (r^2 - r^{-3}) \cos 2\varphi \sin^2 \theta;$

6.  $u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{31} [r^2 (8 \cos 2\varphi - \sin 2\varphi) + 8r^{-3} (4 \sin 2\varphi - \cos 2\varphi)] \sin^2 \theta;$

7.  $u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{31} [r^2 (8 \sin \varphi - \cos \varphi) + 8r^{-3} (4 \cos \varphi - \sin \varphi)] \sin 2\theta;$

8.  $u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{7} (8r^{-2} - r) \cos \theta + \frac{48}{127} (r^3 - r^{-4}) (4 \sin \theta - 5 \sin^3 \theta) \cos \varphi.$

**2.1.**

Обозначим через  $y_{mnk} = ((-1)^m y_1, (-1)^n y_2, (-1)^k y_3)$ .

1.  $G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y_{001}|} - \frac{1}{|x-y_{010}|} + \frac{1}{|x-y_{011}|} \right];$

2.  $G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{|x-y|} - \frac{R|y|}{|(x|y|^2-yR^2)|} - \frac{1}{|x-y_{001}|} + \frac{R|y|}{|(x|y|^2-y_{001}R^2)|} \right];$

3.  $G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y_{100}|} - \frac{1}{|x-y_{110}|} + \frac{1}{|x-y_{101}|} \right];$

4.  $G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{|x-y|} - \frac{R|y|}{|(x|y|^2-yR^2)|} - \frac{1}{|x-y_{010}|} + \frac{R|y|}{|(x|y|^2-y_{010}R^2)|} \right];$

5.  $G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y_{001}|} - \frac{1}{|x-y_{010}|} + \frac{1}{|x-y_{011}|} \right];$

6.  $G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{|x-y|} - \frac{R|y|}{|(x|y|^2-yR^2)|} - \frac{1}{|x-y_{100}|} + \frac{R|y|}{|(x|y|^2-y_{100}R^2)|} \right];$

7.  $G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y_{100}|} - \frac{1}{|x-y_{110}|} + \frac{1}{|x-y_{010}|} \right].$

2.2.

1.  $G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \left( \ln \frac{1}{|z-\zeta|} - \ln \frac{1}{|z+\zeta|} - \ln \frac{1}{|z-\zeta|} + \ln \frac{1}{|z+\zeta|} \right);$
2.  $G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \left( \ln \frac{1}{|z-\zeta|} - \ln \frac{1}{|z-\zeta|} - \ln \frac{R}{|z||z-\zeta^*|} + \ln \frac{R}{|z||z-\zeta^*|} \right);$
3.  $G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^3 (-1)^k \left( \ln \frac{1}{|z-\zeta_k|} - \ln \frac{R}{|z||z-\zeta_k^*|} \right);$
4.  $G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\operatorname{sh} \frac{z-\zeta}{2}}{\operatorname{sh} \frac{z-\zeta+2\pi i}{2}} \right|;$
5.  $G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \left( \ln \left| \frac{\operatorname{sh} \frac{z-\zeta}{2}}{\operatorname{sh} \frac{z-\zeta}{2}} \right| - \ln \left| \frac{\operatorname{sh} \frac{z+\zeta}{2}}{\operatorname{sh} \frac{z+\zeta}{2}} \right| \right);$
6.  $G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \left( \ln \frac{1}{|z-\zeta|} - \ln \frac{1}{|z-\zeta|} - \ln \frac{R}{|z||z-\zeta^*|} + \ln \frac{R}{|z||z-\zeta^*|} \right);$
7.  $G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \left( \ln \frac{1}{|z-\zeta|} - \ln \frac{1}{|z+\zeta|} - \ln \frac{1}{|z-\zeta|} + \ln \frac{1}{|z+\zeta|} \right).$

2.3.

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y-x}{z} + \frac{1}{2}.$$

2.4.

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{y+x}{z} + \operatorname{arctg} \frac{y-x}{z} - \operatorname{arctg} \frac{y+x}{\sqrt{z^2+(y-x)^2}} - \operatorname{arctg} \frac{y-x}{\sqrt{z^2+(y+x)^2}} \right].$$

2.5.

1.  $u(x, y) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x-1}{y} \right);$
2.  $u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2+y^2} \cdot \frac{1}{1+\xi^2} d\xi = \frac{y+1}{(x)^2+(y+1)^2};$
3.  $u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2+y^2} \cdot \frac{\xi}{1+\xi^2} d\xi = \frac{x}{(x)^2+(y+1)^2};$
4.  $u(x, y) = e^{-y} \cos x;$
5.  $u(x, y) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x+2}{y} \right);$
6.  $u(x, y) = \frac{1}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{b-x}{y} - \operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} \right).$

**2.6.**

1.  $u(x, y) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{y};$
2.  $u(x, y) = \frac{2}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right);$
3.  $u(x, y) = \frac{1}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{x-1}{y} - \operatorname{arctg} \frac{x+1}{y} \right);$
4.  $u(x, y) = \frac{1}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{y-2}{x} - \operatorname{arctg} \frac{y+2}{x} \right);$
5.  $u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{y}{(x-\xi)^2+y^2} - \frac{y}{(x+\xi)^2+y^2} \right) \frac{1}{1+\xi^2} d\xi.$

**2.7.**

1.  $u(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{e^{-(2k+1)|x|}}{2k+1} \sin((2k+1)y);$
2.  $u(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{e^{-(2k+1)|x|}}{2k+1} \sin((2k+1)y);$
3.  $u(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{e^{-(2k+1)|x|}}{2k+1} \sin((2k+1)y);$
4.  $u(x, y) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{e^{-(2k+1)|x|}}{2k+1} \sin((2k+1)y);$
5.  $u(x, y) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2y}{\pi} \right) + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^\infty \frac{e^{-(2k+1)|x|}}{k} \sin((2k+1)y).$

**2.8.**

1.  $V_3(r) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{R^3}{3} + \frac{R^2 r^2}{10} - \frac{R^5}{15r} \right)$  для  $r \geq R;$
2.  $V_3(r) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{R^5}{5} + \frac{R^3 r^2}{15} - \frac{R^7}{35r} \right)$  для  $r \geq R;$
3.  $V_3(r) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{4\pi R^{5/2}}{5} - \frac{8\pi R^{7/2}}{105r} \right)$  для  $r \geq R;$
4.  $V_3(r) = -\frac{1}{r} (1 - (1+R)e^{-R} \operatorname{sh} r)$  для  $r \leq R;$
5.  $V_3(r) = -\frac{1}{r} (1 - \cos R - R \sin R)$  для  $r \geq R;$
6.  $V_3(r) = -\frac{1}{r} (\sin R - R \cos R)$  для  $r \geq R;$
7.  $V_3(r) = -\frac{1}{r} (R - \operatorname{arctg} R)$  для  $r \geq R;$
8.  $V_3(r) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{4\pi R^3}{3} \ln 2 - \frac{\pi R^4}{4r} \right)$  для  $r \geq R.$

2.9.

1.  $V_2(r) = -\frac{R^3}{18\pi} (3 \ln r - 1)$  для  $r \geq R$ ;
2.  $V_2(r) = -\frac{R^4}{32\pi} (4 \ln r - 1)$  для  $r \geq R$ ;
3.  $V_2(r) = -\frac{1}{2\pi} (2\pi(1 - (1 + R)e^{-R}) \ln r + C)$  для  $r \geq R$ ;
4.  $V_2(r) = -\frac{1}{2\pi} (\pi \ln(1 + R^2) \ln r + C)$  для  $r \geq R$ ;
5.  $V_2(r) = -\frac{4\pi R^{5/2}}{50\pi} (5 \ln r - 2)$  для  $r \geq R$ ;
6.  $V_2(r) = -\frac{1}{2\pi} (2\pi(\sin R - R \cos R) \ln r + C)$  для  $r \geq R$ ;
7.  $V_2(r) = -\frac{1}{2\pi} (2\pi(R \sin R + \cos R - 1) \ln r + C)$  для  $r \geq R$ ;
8.  $V_2(r, \varphi) = -\frac{R^3}{3r} \sin \varphi$  для  $r \geq R$ ;
9.  $V_2(r, \varphi) = -\frac{R^3}{3r} \cos \varphi$  для  $r \geq R$ .

2.10

$$V(x) = \begin{cases} \mu_0 R, & |x| < R, \\ \mu_0 \frac{R^2}{|x|}, & |x| \geq R. \end{cases}$$

2.11.

1.  $\mu = \mu_0$ :  $V(z) = 2\pi\mu_0(\sqrt{R^2 + z^2} - |z|)$ ;
2.  $\mu = r$ :  $V(z) = 2\pi \left( \frac{R^3}{3|z|} - \frac{(R^2+z^2)^{3/2}}{3|z|} + \sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right)$ ;
3.  $\mu = r^2$ :  $V(z) = 2\pi \left( \frac{R^4}{4|z|} - \frac{(R^2+z^2)^2}{4|z|} + \frac{R^2}{2}(\sqrt{R^2 + z^2} - |z|) \right)$ ;
4.  $\mu = a + br$ :  
 $V(z) = 2\pi \left[ a(\sqrt{R^2 + z^2} - |z|) + b \left( \frac{R^3}{3|z|} - \frac{(R^2+z^2)^{3/2}}{3|z|} + \sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right) \right]$ ;
5.  $\mu = \mu(\varphi)$ :  $V(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi) d\varphi \cdot (\sqrt{R^2 + z^2} - |z|)$ .

2.12.  $W(x) = \begin{cases} -\mu_0, & |x| < R, \\ \mu_0 \frac{R^2}{|x|^2}, & |x| > R. \end{cases}$

$$2.13. V_2(x) = \begin{cases} -\mu_0 R \ln R, & |x| < R, \\ -\mu_0 R \ln |x|, & |x| \geq R. \end{cases}$$

$$2.14. W_2(x) = \begin{cases} 0, & |x| < R, \\ -\mu_0 \frac{R^2}{|x|^2}, & |x| \geq R. \end{cases}$$

### 2.15

- Внутренняя задача Дирихле:  $\mu(x) + \int_{\partial\Omega} K(x, y)\mu(y)dS_y = f(x)$ ;
- Внешняя задача Дирихле:  $\mu(x) - \int_{\partial\Omega} K(x, y)\mu(y)dS_y = f(x)$ ;
- Внутренняя задача Неймана:  $\mu(x) - \int_{\partial\Omega} K^*(x, y)\mu(y)dS_y = g(x)$ ;
- Внешняя задача Неймана:  $\mu(x) + \int_{\partial\Omega} K^*(x, y)\mu(y)dS_y = g(x)$ .

$$2.16. u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - Re^{i\theta}|^2} f(\theta) d\theta.$$

$$2.17. u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{|x - Re^{i\theta}|} g(\theta) d\theta + C.$$

$$2.18. u(x) = \frac{1}{4\pi R} \int_{|\xi|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^3} f(\xi) dS_\xi.$$

### 2.19

- Задача Дирихле:

$$u(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \eta)}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{3/2}} d\xi d\eta;$$

- Задача Неймана:

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi, \eta)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}} d\xi d\eta.$$

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Байков В.А., Жибер А.В. Уравнения математической физики: учебник и практикум для вузов. 2-е изд., испр. и доп. М. : Юрайт, 2024.
2. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Задачи по математической физике : учебное пособие. М. : Изд-во МГУ, 1998.
3. Будаков Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. 4-е изд., испр. М. : Физматлит, 2004.
4. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М. : Физматлит, 2000.
5. Владимиров В.С., Ваширин А.А., Каримова Х.Х. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики : учебное пособие. 3-е изд., испр. М. : Физматлит, 2001.
6. Деревич И.В. Практикум по уравнениям математической физики : учебное пособие. 2-е изд., стер. СПб. : Лань, 2022.
7. Емельянов В.М., Рыбакина Е.А. Уравнения математической физики : практикум по решению задач. СПб. : Лань, 2008.
8. Горюнов А.Ф. Методы математической физики в примерах и задачах : учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Ядерная физика и технологии». М. : Физматлит, 2015.
9. Ильин А.М. Уравнения математической физики. М. : Физматлит, 2009.
10. Карчевский М.М. Лекции по уравнениям математической физики. 4-е изд., стер. СПб. : Лань, 2023.
11. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М. : Высш. шк., 1970.
12. Крупин В.Г., Павлов А.Л., Попов Л.Г. Высшая математика. Уравнения математической физики. Сборник задач с решениями : учебное пособие. М. : Изд. дом МЭИ, 2011.
13. Мамонтов А.Е. Методы математической физики : учебное пособие. Новосибирск : НГПУ, 2016.
14. Паршев Л.П., Калинин А.В. Уравнения в частных производных первого порядка : учебно-методическое пособие. М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011.
15. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики : справочник. М. : Физматлит, 2007.
16. Розендорн Э.Р., Соболева Е.С., Фатеева Г.М. Уравнения с частными производными : учебник для вузов. М. : Физматлит, 2008.
17. Соболева Е.С., Фатеева Г.М. Задачи и упражнения по уравнениям математической физики : учебное пособие. М. : Физматлит, 2012.
18. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1977.

*Учебное издание*

**Васильева** Екатерина Алексеевна

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Часть 2

Учебно-методическое пособие

Редактор *Е. Т. Иванова*

Компьютерная верстка *Г. И. Винокуровой*

Подписано в печать 13.05.2026 г.

Дата выхода в свет 22.05.2026 г.

Формат 70×100<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Усл. печ. л. 5,0

Тираж 300 экз. (1-й завод 31 экз.). Заказ 37

Издательство Балтийского федерального университета им. И. Канта  
236041, г. Калининград, ул. А. Невского, 14